

1. **(a)** $[a, b]$ aralığında monoton artan her fonksiyon bu aralık üzerinde integrallenebilirdir, gösteriniz.

(b) $f(x) = \int_{x-\pi}^{\ln(x+1)} \frac{1}{\cos t} dt$ olduğuna göre $f'(0)$ nedir?

(a) $[a, b]$ aralığında monoton artan her fonksiyonun integrallenebilirliği

Çözüm:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton artan bir fonksiyon olsun. Yani, $x_1 \leq x_2$ için $f(x_1) \leq f(x_2)$.

$[a, b]$ aralığını n eşit parçaya bölelim. Her bir alt aralığın uzunluğu $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ olsun. Bölme noktaları:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad x_i = a + i\Delta x$$

Alt ve üst toplamlar:

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x$$

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

Alt ve üst toplamların farkı:

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))$$

Teleskopik toplam:

$$\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(b) - f(a)$$

Dolayısıyla:

$$U(f, P) - L(f, P) = \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n}$$

$n \rightarrow \infty$ için bu ifade sıfıra gider, bu da f 'nin Riemann integrallenebilir olduğunu gösterir.

(b) $f'(0)$ 'ın hesaplanması

$f(x) = \int_{x-\pi}^{\ln(x+1)} \frac{1}{\cos t + 2} dt$ ise $f'(0)$ nedir?

Çözüm:

Leibniz integral kuralını uygulayalım:

$$f(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} g(t) dt \Rightarrow f'(x) = g(b(x)) \cdot b'(x) - g(a(x)) \cdot a'(x)$$

Burada:

$$a(x) = x - \pi, \quad a'(x) = 1$$

$$b(x) = \ln(x + 1), \quad b'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$g(t) = \frac{1}{\cos t + 2}$$

Türev:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(\ln(x+1))+2} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{\cos(x-\pi)+2}$$

$x = 0$ için:

$$\ln(0 + 1) = 0$$

$$\cos(0) = 1$$

$$x - \pi = -\pi$$

$$\cos(-\pi) = -1$$

Hesaplama:

$$f'(0) = \frac{1}{1+2} \cdot \frac{1}{1} - \frac{1}{-1+2} = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$

Sonuc:

$$f'(0) = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

2. **(a)** $y = \sin x$ eğrisi, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{4\pi}{3}$ ve $y = 0$ doğruları arasında kalan bölgenin $y = 4$ eksenini etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi kaç br^3 dür?

(b) $\int_0^1 \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} dx$ integralini hesaplayınız.

Soru 2(a)

Verilenler:

$$y = \sin x, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{4\pi}{3}.$$

Bölge: Bu bölge $y = 4$ doğrusu etrafında döndürülüyor.

Hacim:

Disk yöntemi (kabuk değil) kullanılır:

$$V = \pi \int_a^b [R^2 - r^2] dx.$$

Burada:

$$R = 4, \quad r = 4 - \sin x.$$

Dolayısıyla:

$$V = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{4\pi}{3}} [4^2 - (4 - \sin x)^2] dx.$$

$$= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{4\pi}{3}} [16 - (16 - 8\sin x + \sin^2 x)] dx = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{4\pi}{3}} [8\sin x - \sin^2 x] dx.$$

$\sin^2 x$ için yarım açı formülü veya doğrudan integral:

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x.$$

Dolayısıyla:

$$V = \pi \left[-8\cos x - \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{4\pi}{3}}.$$

$$= \pi \left[-8\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \left(\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) \right) + 8\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sin\pi \right) \right].$$

Son hali:

$$V = \pi \left[4 - \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{2} \right] = \pi \left[4 + \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right].$$

Sonuç:

$$\boxed{V = \pi \left(4 + \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right)}.$$

(b) Rasyonel Fonksiyon İntegrali

$$\int_0^1 \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} dx$$

Çözüm:

Polinom bölmesi yapalım:

$$\frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} = 2x + \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}$$

Paydayı çarpanlarına ayıralım:

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

Kısmi kesirlere ayırma:

$$\frac{5x - 3}{(x - 3)(x + 1)} = \frac{3}{x - 3} + \frac{2}{x + 1}$$

İntegrali yazalım:

$$\int \left(2x + \frac{3}{x-3} + \frac{2}{x+1} \right) dx = x^2 + 3\ln|x-3| + 2\ln|x+1| + C$$

Sınırları uygulayalım (0'dan 1'e):

$$[x^2 + 3\ln|x-3| + 2\ln|x+1|]_0^1 = (1 + 5\ln 2) - (3\ln 3)$$

Sonuç:

$$\boxed{1 + 5\ln 2 - 3\ln 3}$$

3. **(a)** $f(x) = x + \int \sqrt{x^2 + a} dx$ eşitliği ile verilen $f(x)$ fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi 5 ise a nedir, bulunuz.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x)^{\tan x}$ limitini hesaplayınız.

(a) Integral Denklemlili Fonksiyon ve Teğet Eğimi

$f(x) = x + \int \sqrt{x^2 + a} dx$ şeklinde verilen fonksiyonun $x = 1$ noktasındaki teğetinin eğimi 5 ise a değerini bulunuz.

Çözüm:

1. Önce $f(x)$ fonksiyonunun türevini alalım:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(x + \int \sqrt{x^2 + a} dx \right) = 1 + \sqrt{x^2 + a}$$

2. $x = 1$ noktasında eğim 5 olduğuna göre:

$$f'(1) = 1 + \sqrt{1 + a} = 5$$

3. Denklemini çözelim:

$$\sqrt{1 + a} = 4$$

$$1 + a = 16$$

$$a = 15$$

Sonuc:

$$\boxed{15}$$

(b) Limit Hesaplama

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x)^{\tan x}$$

limitini hesaplayınız.

Çözüm:

1. Limit 1^∞ belirsizliği verir. Logaritma alarak çözelim:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x)^{\tan x}$$

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln(x + \sin x)$$

2. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ yazalım ve limiti düzenleyelim:

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \ln(x + \sin x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x + \sin x)}{\cot x} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ belirsizliği}\right)$$

3. L'Hôpital kuralını uygulayalım:

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1+\cos x}{x+\sin x}}{-\csc^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+\cos x)(-\sin^2 x)}{x+\sin x}$$

4. $x \rightarrow 0^+$ için:

$$\frac{(1+1)(-0)}{0+0} = \frac{0}{0} \quad (\text{Tekrar L'Hôpital})$$

5. Pay ve paydanın türevlerini alalım:

$$\frac{d}{dx} [2(-\sin^2 x)] = -4 \sin x \cos x$$

$$\frac{d}{dx} [x + \sin x] = 1 + \cos x$$

6. Limit:

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-4 \sin x \cos x}{1 + \cos x} = \frac{0}{2} = 0$$

7. Sonuç:

$$L = e^0 = 1$$

Sonuc:

$$\boxed{1}$$

4. **(a)** $y = e^x$ ve $y = e^{-x+2}$ eğrileri ile $x = 0$ doğrusu arasında kalan bölgenin çevresi kaç br dir?

(b) $y^2 = x + 1$ parabolü ve $y = x - 1$ doğrusu ile sınırlandırılan bölgenin alanını bulunuz.

(a) Eğriler Arası Bölgenin Çevresi

$y = e^x$, $y = e^{-x+2}$ eğrileri ve $x = 0$ doğrusu arasında kalan bölgenin çevresini bulunuz.

Çözüm:

1. Kesişim Noktalarını Bulma:

$$e^x = e^{-x+2}$$

$$x = -x + 2$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

Kesişim noktası: $(1, e^1) = (1, e)$

2. Sınırları Belirleme:

- $x = 0$ (y-ekseni)
- $x = 1$ (kesişim noktası)

3. Çevre Hesaplama:

$$\begin{aligned}\text{Çevre} &= \int_0^1 \sqrt{1 + (e^x)^2} dx + \int_0^1 \sqrt{1 + (-e^{-x+2})^2} dx \\ &\quad + \text{Dikeymesafe}(e^0 - e^2) + \text{Yataymesafe}(1)\end{aligned}$$

Ancak daha basit yaklaşım:

$$\begin{aligned}\text{Çevre} &= \text{Alteğriuzunluğu} + \text{Üsteğriuzunluğu} + \text{Dikeykenarlar} \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + (e^x)^2} dx + \int_0^1 \sqrt{1 + (e^{-x+2})^2} dx \\ &\quad + |e^0 - e^{-0+2}| + |e^1 - e^{-1+2}|\end{aligned}$$

(b) Parabol ve Doğru ile Sınırlanan Alan

$y^2 = x + 1$ parabolü ve $y = x - 1$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

1. Kesişim Noktalarını Bulma:

$$(x - 1)^2 = x + 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = x + 1$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{veya} \quad x = 3$$

Kesişim noktaları: $(0, -1)$ ve $(3, 2)$

2. Alan Hesaplama:

$$\begin{aligned} \text{Alan} &= \int_{-1}^2 [(y + 1) - (y^2 - 1)] dy \\ &= \int_{-1}^2 (y + 2 - y^2) dy \\ &= \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^2 \\ &= \left(2 + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) \\ &= \left(6 - \frac{8}{3} \right) - \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Sonuc:

$$\left[\frac{9}{2} \right] \text{br}^2$$

5. **(a)** $\int_{-1}^2 |x| \cdot \lfloor x^2 \rfloor dx$ integralini hesaplayınız.
(b) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x-4}} dx$ integralini hesaplayınız.

$$(a) \int_{-1}^2 |x| \lfloor x^2 \rfloor dx$$

Adımlar:

$\lfloor x^2 \rfloor$ tam kısmı olduğu için aralıkları belirleyelim.

Pozitif tarafta:

$$\begin{cases} x \in [0, 1) & \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 0 \\ x \in [1, \sqrt{2}) & \Rightarrow x^2 \in [1, 2) \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 1 \\ x \in [\sqrt{2}, \sqrt{3}) & \Rightarrow x^2 \in [2, 3) \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 2 \\ x \in [\sqrt{3}, 2] & \Rightarrow x^2 \in [3, 4] \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 3. \end{cases}$$

Negatif tarafta:

$$x \in [-1, 0) \Rightarrow x^2 \in [0, 1) \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 0.$$

İntegraller:

$$I = \int_{-1}^0 |x| \cdot 0 \, dx + \int_0^1 x \cdot 0 \, dx + \int_1^{\sqrt{2}} x \cdot 1 \, dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} x \cdot 2 \, dx + \int_{\sqrt{3}}^2 x \cdot 3 \, dx.$$

$$I_1 = 0, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = \int_1^{\sqrt{2}} x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$I_4 = 2 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} x \, dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = [x^2]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = (3 - 2) = 1.$$

$$I_5 = 3 \int_{\sqrt{3}}^2 x \, dx = 3 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{\sqrt{3}}^2 = \frac{3}{2} (4 - 3) = \frac{3}{2}.$$

Toplam:

$$I = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3.$$

Sonuç:

$$\boxed{3}.$$

—

$$(b) \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x-4}} \, dx$$

Adım 1: Karekökü düzenleyelim.

$$x^2 + 4x - 4 = (x + 2)^2 - 8. \quad u = x + 2 \Rightarrow du = dx, \quad x + 3 = u + 1.$$

Adım 2: Yerine koy:

$$\int \frac{u+1}{\sqrt{u^2-8}} \, du = \int \frac{u}{\sqrt{u^2-8}} \, du + \int \frac{1}{\sqrt{u^2-8}} \, du.$$

Adım 3:

$$\int \frac{u}{\sqrt{u^2-8}} \, du = \sqrt{u^2-8}, \quad \int \frac{1}{\sqrt{u^2-8}} \, du = \ln|u + \sqrt{u^2-8}|.$$

Sonuç:

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x-4}} \, dx = \sqrt{x^2+4x-4} + \ln|x+2 + \sqrt{x^2+4x-4}| + C.$$

$$\sqrt{x^2 + 4x - 4} + \ln|x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x - 4}| + C.$$

5. $f(x) = \frac{x^2-7x+1}{x^2+3x}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

1. Adım: Pay ve Paydayı Çarpanlarına Ayırma

Fonksiyonu sadeleştirmek için pay ve paydayı çarpanlarına ayıralım:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2-7x+10}{x^2+3x} \\ &= \frac{(x-2)(x-5)}{x(x+3)} \end{aligned}$$

2. Adım: Tanım Kümesini Belirleme

Paydayı sıfır yapan değerler:

$$\begin{aligned} x(x+3) &= 0 \\ x &= 0 \quad \text{veya} \quad x = -3 \end{aligned}$$

Tanım Kümesi: $(-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, \infty)$

3. Adım: Düşey Asimptotları Bulma

Paydayı sıfır yapan ancak payı sıfır yapmayan noktalarda düşey asimptot vardır:

$$x = -3 \quad \text{ve} \quad x = 0$$

4. Adım: Yatay Asimptot Bulma

Pay ve paydanın dereceleri eşit olduğundan:

$$y = \frac{1}{1} = 1$$

5. Adım: x-Kesim Noktalarını Bulma

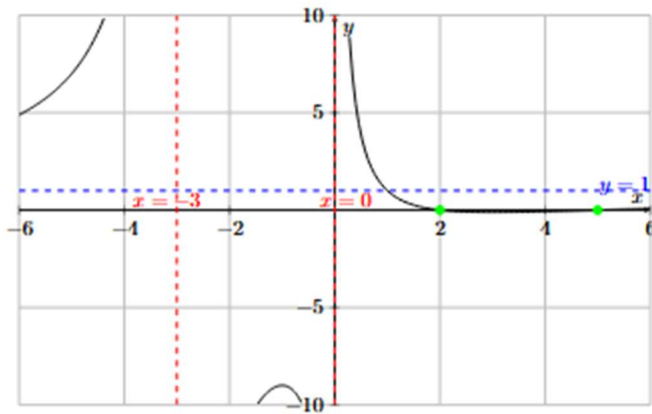
Payı sıfır yapan değerler:

$$(x - 2)(x - 5) = 0$$

$$x = 2 \quad \text{ve} \quad x = 5$$

Grafik Özellikleri:

- Düşey asimptotlar $x = -3$ ve $x = 0$ 'da
- Yatay asimptot $y = 1$ 'de
- x-eksenini kestiği noktalar: $(2,0)$ ve $(5,0)$
- $x \rightarrow -3^-$ iken $f(x) \rightarrow +\infty$
- $x \rightarrow -3^+$ iken $f(x) \rightarrow -\infty$
- $x \rightarrow 0^-$ iken $f(x) \rightarrow -\infty$
- $x \rightarrow 0^+$ iken $f(x) \rightarrow +\infty$



6. $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x + 1$ için $[-1,1]$ aralığının 6 elemanlı düzgün bir P parçalanışına göre alt Darboux toplamını $A(f, P)$ -yi bulunuz.

1. Adım: Parçalanışı Tanımlama

6 noktalı parçalanış (5 eşit alt aralık):

$$P = \left\{-1, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1\right\}$$

Aralık uzunlukları: $\Delta x = \frac{2}{5}$

2. Adım: Monotonluk Analizi

$f'(x) = 3x^2 - 1$ kritik noktalar:

$$3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \approx \pm 0.577$$

Monotonluk:

- $x \in [-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}]$: $f'(x) > 0$ (artan)
- $x \in [-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$: $f'(x) < 0$ (azalan)
- $x \in [\frac{\sqrt{3}}{3}, 1]$: $f'(x) > 0$ (artan)

3. Adım: Alt Aralıklarda Minimumlar

1. $[-1, -\frac{3}{5}]$:

Artan olduğu için minimum $f(-1) = 1$

2. $[-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}]$:

$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577 > 0.6$ olduğundan azalan,

minimum $f(-\frac{1}{5}) = \frac{149}{125} = 1.192$

3. $[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}]$:

Azalan olduğu için minimum $f(\frac{1}{5}) = \frac{101}{125} = 0.808$

4. $[\frac{1}{5}, \frac{3}{5}]$:

Kritik nokta içerir ($\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577 \in [0.2, 0.6]$),

minimum $f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0.615$

5. $[\frac{3}{5}, 1]$:

Artan olduğu için minimum $f(\frac{3}{5}) = \frac{77}{125} = 0.616$

4. Adım: Alt Darboux Toplamı

$$A(f, P) = \frac{2}{5} \left(1 + \frac{149}{125} + \frac{101}{125} + \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{9} \right) + \frac{77}{125} \right)$$

$$= \frac{2}{5} \left(\frac{125}{125} + \frac{149}{125} + \frac{101}{125} + \frac{77}{125} + \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{9} \right) \right)$$

$$= \frac{2}{5} \left(\frac{452}{125} + 1 - \frac{2\sqrt{3}}{9} \right) = \frac{2}{5} \left(\frac{577}{125} - \frac{2\sqrt{3}}{9} \right)$$

Sonuç:

$$A(f, P) = \boxed{\frac{1154}{625} - \frac{4\sqrt{3}}{45}} \approx \boxed{1.692}$$

7. $y = -x^2 + 4x - 3$ parabolü ile $y = x - 3$ doğrusunun sınırlandığı bölgenin $x = -2$ eksen etrafında dönmesi sonucu oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

1. Adım: Kesişim Noktalarını Bulma

$$-x^2 + 4x - 3 = x - 3$$

$$-x^2 + 3x = 0$$

$$x(-x + 3) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{veya} \quad x = 3$$

Kesişim noktaları: $(0, -3)$ ve $(3, 0)$

2. Adım: Silindirik Kabuk Yöntemi

Dönme eksen $x = -2$ olduğundan, yarıçap $r = x - (-2) = x + 2$, yükseklik $h = \text{üstfonksiyon} - \text{altfonksiyon}$:

$$V = 2\pi \int_0^3 (x + 2)[(-x^2 + 4x - 3) - (x - 3)]dx$$

3. Adım: İntegrali Düzenleme

$$V = 2\pi \int_0^3 (x + 2)(-x^2 + 3x)dx$$

$$= 2\pi \int_0^3 (-x^3 + 3x^2 - 2x^2 + 6x)dx$$

$$= 2\pi \int_0^3 (-x^3 + x^2 + 6x)dx$$

4. Adım: İntegrali Hesaplama

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^3 \\
&= 2\pi \left(-\frac{81}{4} + 9 + 27 \right) \\
&= 2\pi \left(-\frac{81}{4} + 36 \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{-81+144}{4} \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{63}{4} \right) \\
&= \frac{126\pi}{4} = \frac{63}{2}
\end{aligned}$$

Sonuç:

$$V = \boxed{\frac{63\pi}{2}} \text{ birim}^3$$