

1. soru	2. soru	3. soru	4. soru	5. soru	6. soru	7. soru	Toplam

Adı Soyadı:

06.01.2026

Numara:

MAT 211 ANALİZ III DERSİ FİNAL SINAVI SORULARI

1) a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} + \sin(x^3)} dx$ integralinin karakterini belirleyiniz.

b) $\int_1^\infty \frac{dx}{x-1+\sqrt{x-1}}$ has olmayan integralinin değerini bulunuz.

2) $f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(nx)}{n^3}$ fonksiyon serisinin terim terim integrallenebilir olduğunu gösteriniz

ve $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^4}$ olduğunu elde ediniz.

3) $f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ olarak verilen (f_n) fonksiyon dizisinin terim terim türevlenebilir olduğunu gösteriniz.

4) $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n\sqrt{n} 3^n}$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını ve yakınsaklık kümesini bulunuz.

5) $x_n = \left(\frac{\sin n + n \cos n}{n^2}, 1 \right) \subset \mathbb{R}^2$ (x_n) dizisi veriliyor. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (0,1) \in \mathbb{R}^2$ olduğunu tanımlı kullanarak gösteriniz.

6) $\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{3^n}{4^{n+4}}, \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right), \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{e^{n^2}} \right)$ serisinin $\mathbb{R}^3$ de karakterini bulunuz.
(Nedenlerini açıklayınız)

7) a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \geq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq -1, y \leq -1\}$ verilsin. A nın şeklini çizin. A kümesi bağlantılı mıdır? Neden?

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\}$ kümesi veriliyor. B sınırlı mıdır? B kapalı mıdır? B açık mıdır? B kompakt mıdır?

Not: 5. soru 10, diğer sorular 15'er puandır. Süre 110 dakikadır.

Prof. Dr. Birsen Sağır Duyar

① a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} + \sin(x^3)} dx$ integralinin karakterini belirleyiniz. ()

b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x-1+\sqrt{x-1}}$ has olmayan integralinin değerini bulunuz. ()

Gözüm: a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sin(x^3)}$, $\forall x \in (0,1]$ için

f , $[a,1]$ aralığında sürekli olup integrallenebilir.

Ayrıca her $x \in (0,1]$ için $f(x) > 0$ dir.

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ seçelim. $\forall x \in (0,1]$ için g , $[a,1]$ de

sürekli olup integrallenebilir.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x} + \sin(x^3)}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} (1 + \frac{\sin(x^3)}{\sqrt{x}})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \frac{\sin(x^3)}{\sqrt{x}}} = 1 \neq 0$$

olduğundan ve $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ($p = \frac{1}{2} < 1$) integrali p-testi gereği yakınsak olup, Bslm Testine göre verilen integral yakınsaktır.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x^3)}{\sqrt{x}} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 \cdot \cos(x^3)}{\frac{1}{2} \cdot x^{1/2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 6 \cdot x^{5/2} \cdot \cos(x^3) = 0 \cdot 1 = 0$$

$$b) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x-1+\sqrt{x-1}} = \int_1^2 + \int_2^{\infty}$$

$f(x) = \frac{1}{x-1+\sqrt{x-1}}$ diyelim. $\forall a \in (1,2]$ ve $\forall B \in [2,\infty)$ için

f fonksiyonu $[a,2]$ ve $[2,B]$ aralıklarında sürekli olup integrallenebilir.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x-1+\sqrt{x-1}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{1+\lambda}^2 \frac{dx}{x-1+\sqrt{x-1}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{\lambda+1}^2 \frac{2 du}{u} = 2 \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \ln u \Big|_{\lambda+1}^2$$

$$= 2 \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} [\ln 2 - \ln(\lambda+1)] = 2 \ln 2$$

$$\begin{array}{l} u = \sqrt{x-1} + 1 \\ du = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \end{array}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x-1+\sqrt{x-1}} = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_2^B \frac{dx}{x-1+\sqrt{x-1}}$$

$$= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_2^B \frac{dx}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)}$$

$$= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_2^{\sqrt{B-1}+1} \frac{2du}{u} = 2 \lim_{B \rightarrow \infty} \ln u \Big|_2^{\sqrt{B-1}+1}$$

$$= 2 \lim_{B \rightarrow \infty} [\ln(\sqrt{B-1}+1) - \ln 2] = \infty$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x-1+\sqrt{x-1}} = \ln 2 + \infty = +\infty.$$

② $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$ fonksiyon serisinin terim

terim integrallenebildiğini gösteriniz ve

$$\int_0^{\pi/2} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^4} \text{ olduğunu elde ediniz. (6)}$$

Çözüm: $\left| \frac{\cos nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$, $\sum \frac{1}{n^3}$ ($p=3>1$) yakınsak

olduğundan Weierstrass M-testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$ serisi

$\forall x \in \mathbb{R}$ için düzgün yakınsaktır.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^3}$ fonksiyonları serektir oldu-

ğundan verilen seri terim terim integrallenebilirdir. Yani

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3} \right) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos nx}{n^3} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{n^4} \right) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \frac{\pi}{2}}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^4} \end{aligned}$$

③ $f_n(x) = n \cdot \sin \frac{x}{n}$ $n=1,2,\dots$ olarak verilen (f_n) fonksiyon dizisinin terim terim türevlenebilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\left. \begin{array}{l} f_n \rightarrow f(n,y) \\ f'_n \rightarrow g(d,y) \end{array} \right\} \Rightarrow f' = g$ ise terim terim türevlenebilirdir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \frac{x}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \sin \frac{x}{n}}{x \cdot \frac{1}{n}} = x = f(x)$$

$f_n(x) \rightarrow f(x) = x$ noktasal yakınsar. ($x \in \mathbb{R}$)

$$f'_n(x) = n \cdot \cos \frac{x}{n} \cdot \frac{1}{n} = \cos \frac{x}{n}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = 1 = g(x)$, $f'_n \rightarrow g$ düzgün yakınsaktır:

$$a_n = \sup \left\{ \left| \cos \frac{x}{n} - 1 \right| : x \in \mathbb{R} \right\} = \sup \left\{ \left| 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2n} \right| - 1 : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \sup \left\{ 2 \sin^2 \frac{x}{2n} : x \in \mathbb{R} \right\} \leq \frac{x^2}{2n^2}$$

$$\left(\forall x \in \mathbb{R} \text{ için } 2 \sin^2 \frac{x}{2n} \leq 2 \cdot \frac{x^2}{4n^2} = \frac{x^2}{2n^2} \right)$$

$$0 \leq a_n \leq \frac{x^2}{2n^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow f'_n \rightarrow g \stackrel{!}{=} \text{düzgün yakınsar.}$$

$$(f(x))' = x' = 1 = g(x)$$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot \sqrt{n} \cdot 3^n}$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını ve yakınsaklık kümesini bulunuz.

Çözüm:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{3/2} \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{n^{3/2} \cdot 3^n}{x^n} \right| = \frac{|x|}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{3/2} = \frac{|x|}{3}$$

$\frac{|x|}{3} < 1 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$ olduğunda seri mutlak yakınsak, dolayısıyla yakınsaktır. $r=3$ dır.

$x=-3$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^{3/2} \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$ yakınsaktır. (Leibnitz)

$x=3$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^{3/2} \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ yakınsaktır. ($p=3/2 > 1$)

yakınsaklık yarıçapı $r=3$, yakınsaklık aralığı $[-3, 3]$ dır.

5) $x_n = \left(\frac{\sin n + n \cos n}{n^2}, 1 \right) \in \mathbb{R}^2$ (x_n) dizisi veriliyor.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ olduğunu tanımı kullanarak gösteriniz.

Çözüm: $\forall \varepsilon > 0, \forall n \geq n_0$ için $\left\| \left(\frac{\sin n + n \cos n}{n^2}, 1 \right) - (0, 1) \right\| < \varepsilon$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ bulmalıyız.

$\forall n \geq n_0$ için

$$\left\| \left(\frac{\sin n + n \cos n}{n^2}, 1 \right) - (0, 1) \right\| = \left\| \left(\frac{\sin n + n \cos n}{n^2}, 0 \right) \right\| =$$

$$= \left| \frac{\sin n + n \cos n}{n^2} \right| \leq \frac{|\sin n| + |n \cos n|}{n^2} \leq \frac{1 + |n|}{n^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$$

$$\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon$$

$$\text{o.y. } n_0 > \frac{2}{\varepsilon} \text{ oh. } n_0 = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \in \mathbb{N}$$

6) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n+4}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}} \right)$

serisinin $\mathbb{R}^3$ de karakterini bulunuz. (Nedenleri açıklayınız)

Çözüm:

• $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{3^n}{4^n+4} > 0, \frac{3^n}{4^n+4} < \left(\frac{3}{4}\right)^n = b_n, \frac{3}{4} < 1$ old. $\sum b_n$ yakınsak

Karşılaştırma testine göre $\sum \frac{3^n}{4^n+4}$ serisi yakınsaktır.

• $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{n^2} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right), n \geq 1, 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow 1 < 1+\frac{1}{n} \leq 2$

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0$ olur. $a_n > 0$. $b_n = \frac{1}{n^2}$ olur.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0$

$\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ yakınsak olduğunda $\sum a_n$ yakınsaktır.

• $a_n = \frac{n}{e^{n^2}}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{e^{n^2+2n+1}} \cdot \frac{e^{n^2}}{n}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n^2}}{e^{n^2+2n+1}}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n^2}}{e^{n^2} \cdot e^{2n+1}}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{2n+1}$

$= 1 \cdot 0 = 0 < 1$

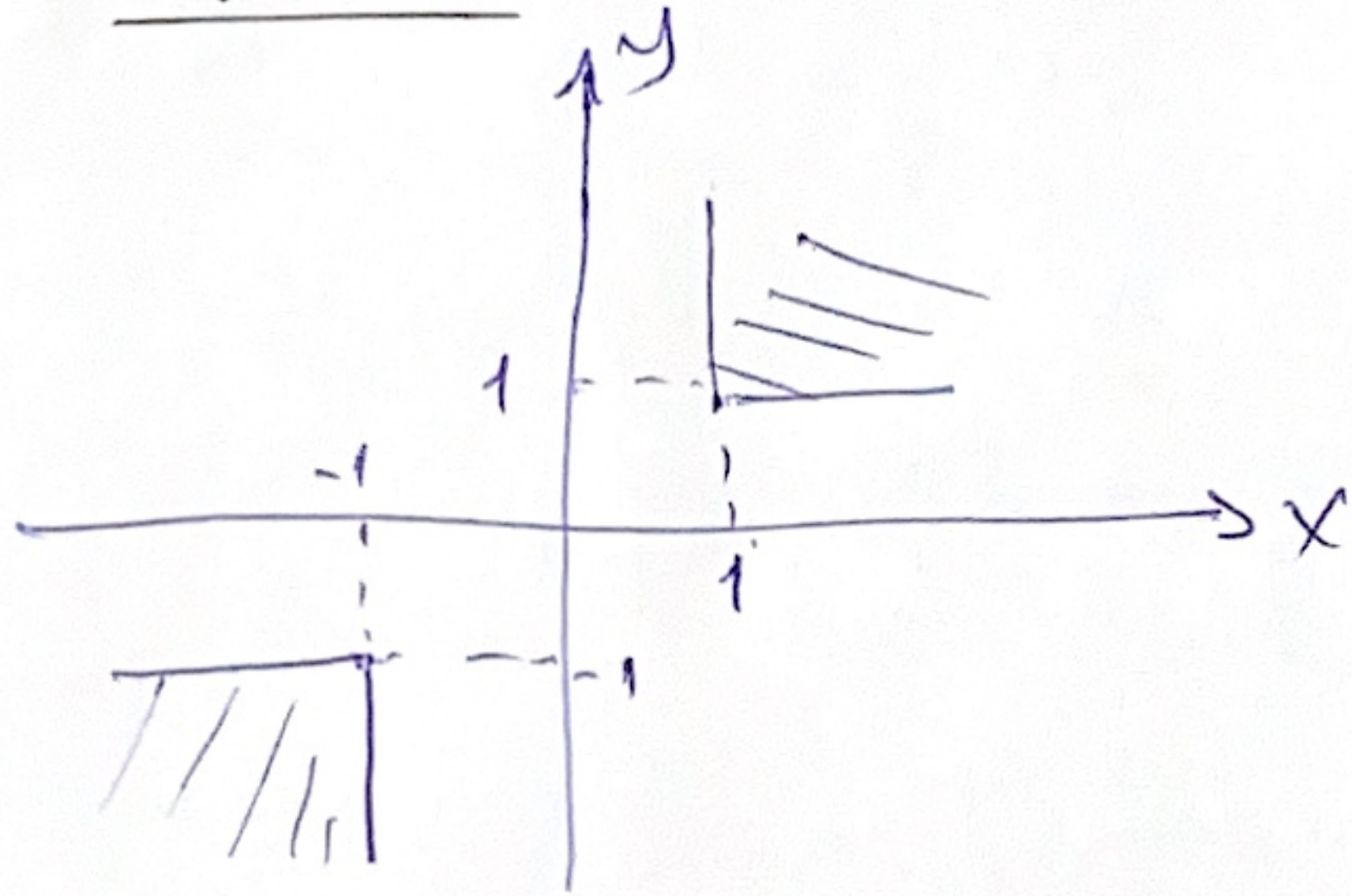
olduğunda Oran Testine göre seri yakınsak.

Her bir bileşen serisi yakınsak olduğundan verilen seri yakınsaktır.

7) a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \geq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq -1, y \leq -1\}$ verilsin. A 'nın şeklini çiziniz. Bağlantılı mıdır? Neden?
 b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\}$ kümesi veriliyor.

B sınırlı mıdır? B kapalı mıdır? B açık mıdır?
 B kompakt mıdır?

Çözüm:



$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$$

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y < 0\}$$

$$U \cap V = \emptyset$$

$$A \subset U \cup V$$

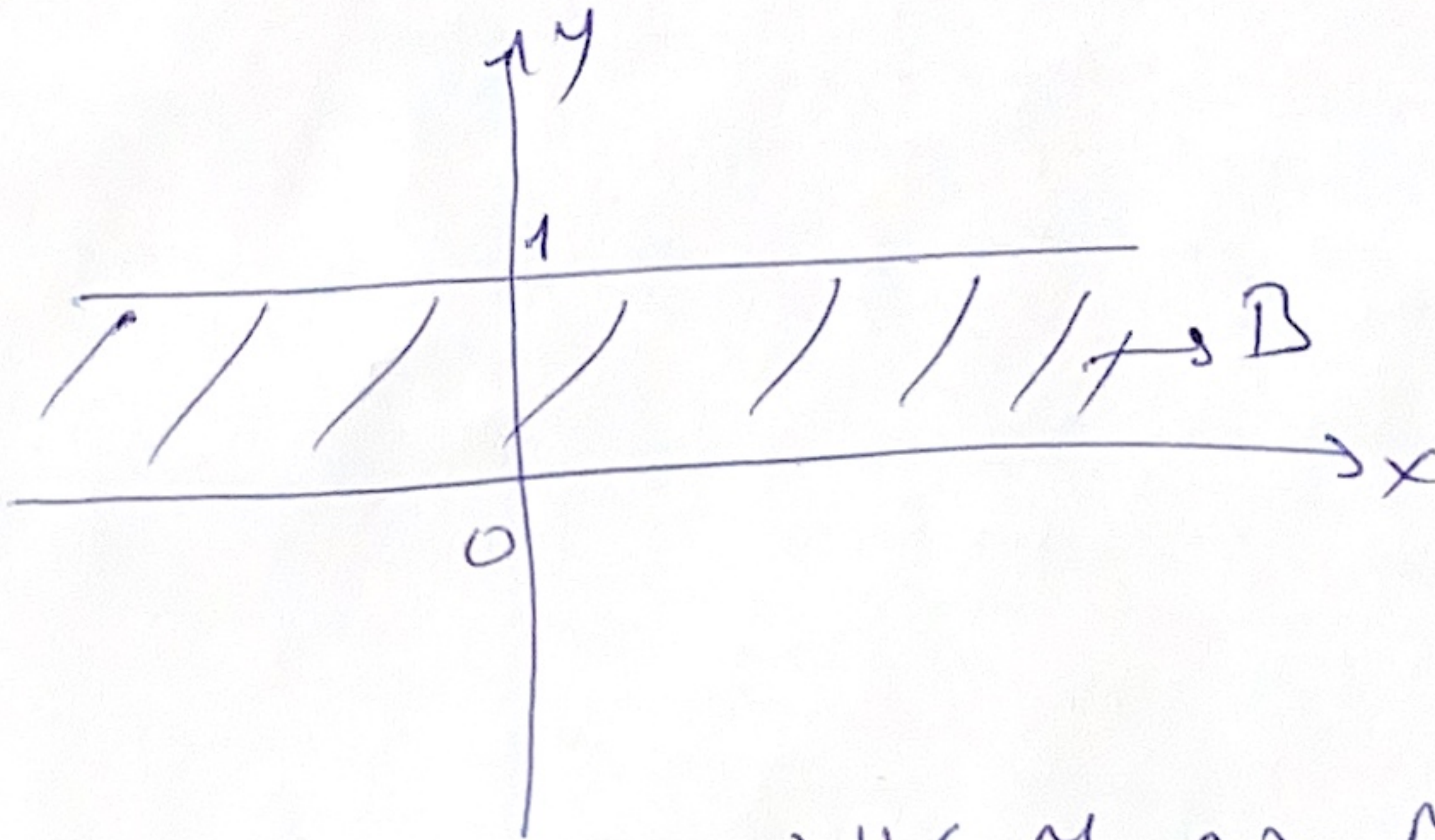
$$U \cap A \neq \emptyset$$

$$V \cap A \neq \emptyset$$

$$U, V \text{ açık}$$

old. A bağlantılı değildir.

b)



$\forall (x,y) \in B$ isin $\|(x,y)\| \leq M$ old. M varmı?

olsaydı $\sqrt{x^2 + y^2} < M \Rightarrow |x| < M$ olurdu. $x \in \mathbb{R}$ olduğundan

$x = M+1$ seçilirse $M+1 < M$ olur - Bu sebebi B sınırlı değil

B kapalıdır - (çünkü tümleyenı açıktır -

$(x,1), (x,0) \notin B^\circ$ old. B açık değildir.

kapalı fakat sınırlı olmadığından kompakt değildir.

S. soru 10, diğerleri 15'er puandır.