

1. soru	2. soru	3. soru	4. soru	5. soru	6. soru	7. soru	Toplam

Adı Soyadı:

18.11.2025

Numara:

MAT 211 ANALİZ III DERSİ ARA SINAV SORULARI

- 1) $\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \ln x}$ has olmayan integralinin karakterini belirleyiniz.
- 2) $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} (1 - e^{-x}) \frac{\cos x}{x^2} dx$ has olmayan integralinin yakınsak olduğunu Abel Testini uygulayarak belirleyiniz.
- 3) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x-1+\sqrt{x-1}}$ has olmayan integralinin değerini bulunuz.
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$ serisinin yakınsaklığını inceleyip, toplamını bulunuz.
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(1+\frac{1}{3})(2+\frac{1}{3})\dots(n+\frac{1}{3})}$ serisinin karakterini belirleyiniz.
- 6) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\ln k)^3}{k}$ serisinin koşullu yakınsak olduğunu gösteriniz.
- 7) Aşağıda verilen (a) ve (b) önermelerin doğru ya da yanlış olup olmadığını belirleyerek, (c), (d) ve (e) şıklarındaki boşlukları doldurunuz.
 - a) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ integrali has olmayan integraldir. (.....)
 - b) $f: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verildiğinde
 $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left[\int_{-p}^c f(x) dx + \int_c^p f(x) dx \right]$ eşitliği vardır. (.....)
 - c) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ has olmayan integrali ise E. D $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ dır.
 - d) $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ has olmayan integrali ise yakınsak, ise ıraksaktır.
 - e) $\int_a^b |f(x)| dx$ has olmayan integrali yakınsak ise $\int_a^b f(x) dx$ integraline denir.

Not: İlk 6 soru 15'er puan 7. sorudaki her şık 2 puandır. Süre 110 dakikadır.

Prof. Dr. Birsen Sağır Duyar

① $\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \ln x}$ integralinin karakterini belirleyiniz? (1)

Çözüm: $[1, e]$ integralleme aralığı sınırlı ve

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x \ln x} = \infty$ olduğundan verilen 2. tür
hassolmayan integraldir.

$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, $g(x) = \frac{1}{\ln x}$ olsun.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1$ olduğundan Bölüm Testi.

$\int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$ ile $\int_1^e \frac{dx}{\ln x}$ integralleri aynı karaktere

sahiptir.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \frac{1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1/x} = 1 \neq 0$

olduğundan $\int_1^e \frac{dx}{\ln x}$ integrali ıraksaktır. Böylece

$\int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$ integrali de ıraksak olur.

2) $\int_{1/2}^{\infty} (1 - e^{-x}) \frac{\cos x}{x^2} dx$ has olmayan integralinin yakınsak olduğunu Abel Testini uygulayarak belirleyiniz.

Çözüm: $\forall x \in [1/2, \infty)$ için $\varphi(x) = 1 - e^{-x}$, $f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$ olsun.

$\varphi'(x) = e^{-x} > 0$ olduğundan $\varphi(x) = 1 - e^{-x}$, $x \in [1/2, \infty)$ için artan.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - e^{-x}) = 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 1$ olduğundan

$\varphi(x) \leq 1$ dir. $x \in [1/2, \infty)$ için $1 - e^{-1/2} \leq \varphi(x) < 1$ dir.

$\Rightarrow \varphi$ sınırlıdır.

$$\int_{1/2}^{\infty} f(x) dx = \int_{1/2}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

$$|f(x)| = \frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} = g(x).$$

$$\int_{1/2}^{\infty} g(x) dx = \int_{1/2}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ yakınsak olduğundan } (p=2>1)$$

Karşılaştırma Testine göre $\int_{1/2}^{\infty}$

$\int_{1/2}^{\infty} |f(x)| dx$ yakınsak yani $\int_{1/2}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}$ mutlak yakınsak

dolayısıyla yakınsaktır. ∞

Abel Testine göre $\int_{1/2}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx = \int_{1/2}^{\infty} (1 - e^{-x}) \frac{\cos x}{x^2} dx$

yakınsak olur.

3) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x-1+\sqrt{x-1}}$ hassolmayan integralinin değerini bulunur.

Görüm:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x-1+\sqrt{x-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{x-1+\sqrt{x-1}} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{x-1+\sqrt{x-1}}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1+\sqrt{x-1}}, \quad \forall x \in (1, 2] \text{ i} \ddot{u}m \quad \forall R \in (2, \infty) \text{ n},$$

f , $[x, 2]$ ve $[2, R]$ aralıklarında sürekli olup integrallenebilirler.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x-1+\sqrt{x-1}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{1+\lambda}^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)} \quad \left(\begin{array}{l} \sqrt{x-1}+1=t \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} dx = dt \end{array} \right)$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{1+\lambda}^2 \frac{2dt}{t}$$

$$= 2 \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \ln t \Big|_{\lambda+1}^2 = 2 \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} [\ln 2 - \ln(\lambda+1)]$$

$$= 2 \ln 2$$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x-1+\sqrt{x-1}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_2^R \frac{dx}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_2^{\sqrt{R-1}+1} \frac{2dt}{t}$$

$$= 2 \lim_{R \rightarrow \infty} \ln t \Big|_2^{\sqrt{R-1}+1}$$

$$= 2 \lim_{R \rightarrow \infty} [\ln(\sqrt{R-1}+1) - \ln 2]$$

$$= \infty$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{x-1+\sqrt{x-1}} = 2 \ln 2 + \infty = \infty$$

$$\textcircled{11} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n(n+1)}}$$

serisinin yakınsaklığını inceleyip, toplamını bulunur.

Çözüm:

$$a_n = \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{n}{\sqrt{n} \sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{(n-1)(n+1)}}{\sqrt{n} \sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} - \frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 0 \right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) + \dots + \left(\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{n-1}} \right) +$$

$$+ \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \right) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1 \text{ olduğundan verilen seri}$$

yakınsaktır ve toplamı 1 dir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(1+\frac{1}{3})(2+\frac{1}{3})\dots(n+\frac{1}{3})}$$
 Serinin karakterini belirleyiniz.

Çözüm: $a_n = \frac{n!}{(1+\frac{1}{3})(2+\frac{1}{3})\dots(n+\frac{1}{3})}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(1+\frac{1}{3})(2+\frac{1}{3})\dots(n+\frac{1}{3})(n+1+\frac{1}{3})} \cdot \frac{(1+\frac{1}{3})\dots(n+\frac{1}{3})}{n!} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+\frac{4}{3}} = 1
 \end{aligned}$$

Oran Testi cevap vermez. Raabe testini uygulayalım.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{n+\frac{4}{3}}{n+1} - 1 \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{4}{3} - 1) \cdot n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{3} < 1$$

olduğunda seri iraksaktır.

5) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln^3 k}{k}$ serisinin koşullu yakınsak olduğunu
 6) gösteriniz.

Çözüm: $a_k = \frac{\ln^3 k}{k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k \geq 0$ ($k \geq 2$ için $a_k > 0$)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln^3 k}{k} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^3 x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}}{1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{\ln^2 x}{x} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{1} = 6 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$$

$$= 6 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0,$$

$$f(n) = a_n, \quad f(x) = a(x) = \frac{\ln^3 x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln^3 x}{x^2} = \frac{\ln^2 x \cdot (3 - \ln x)}{x^2} < 0 \quad (\forall x > e^3)$$

olup, $k > e^3$ için a_k azalmaktadır.

Leibniz Testi gereği $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln^3 k}{k}$ serisi yakınsaktır.

$\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{\ln^3 k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^3 k}{k}$ serisinin ıraksak olduğunu gösterelim:

$$a_k = \frac{\ln^3 k}{k}, \quad b_k = \frac{1}{k} \quad \text{Bölüm Testi, } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \infty$$

olup, $\sum \frac{1}{k}$ ıraksak olduğundan $\sum \frac{\ln^3 k}{k}$ ıraksaktır.

Doğru, yanlış.

7) a) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ integrali has olmayan integraldir. - - - Yanlış?

b) $f: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verildiğinde
 $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx = \lim_{P \rightarrow +\infty} \left[\int_{-P}^c f(x) dx + \int_c^P f(x) dx \right]$
eşitliği vardır. - Yanlış.

c) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ has olmayan integrali - - - - - ise yakınsak

$$\text{E.D. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \text{ dir.}$$

d) $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ has olmayan integrali - - - - - ise yakınsak,
- $p > 1$ - ~~4/3~~ ise ıraksaktır.

e) $\int_a^b |f(x)| dx$ has olmayan integrali yakınsak ise

$\int_a^b f(x) dx$ integraline mutlak yakınsak - - - - - derir.