

1.soru	2.soru	3.soru	4.soru	5.soru	6.soru	7.soru	Toplam

Adı Soyadı :

26.01.2026

Numarası :

MAT 211 ANALİZ III BÜTÜNLEME SINAV SORULARI

1) a) $\int_1^{\infty} \frac{1 + \sin^4(2x)}{\sqrt{x}} dx$ b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

has olmayan integrallerinin karakterini bulunuz.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n}$ serisi mutlak yakınsak mıdır?
kondullu yakınsak mıdır?

3) $x \in \mathbb{R}$ için $f_k(x) = \frac{k \sin x - 1}{k}$ olmak üzere

$\{f_k\}$ fonksiyon dizisi düzgün yakınsak mıdır? Neden?

4) a) $x \in [0,1]$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n+x^2)^2}$ serisi düzgün yakınsak mıdır? Neden?

b) $\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n+x^2)^2} \right) dx$ integralinin değerini bulunuz.

5) a) $a_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right), n - \sqrt{n^2+n} \right)$ olmak üzere $\mathbb{R}^2$ de verilen (a_n) dizisinin karakterini belirleyiniz. Yakınsak ise limitini bulunuz.

b) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} (0,3)^{1/n}, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{n} \right)^n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$

$\mathbb{R}^3$ de verilen serinin karakterini belirleyiniz

6) a) $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesinin bağlantısız olduğunu gösteriniz.

b) $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ kümesinin kompakt olup olmadığını inceleyiniz.

7) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (x+2)^{n-1}}{n+1}$ kuvvet serisinin yakınsaklık

yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

Not: 3. soru 10, diğerleri 15'er puandır. Başarılar.
süre 110 dakikadır.

prof. Dr. Bilsen SAĞIR DUYAR

Sorun 2 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n}$ serisi

mutlak yakınsak mıdır? Kozullu yakınsak mıdır?

Neden?

Gör: $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n} = \frac{\ln e}{n} < \frac{\ln n}{n}$, $\sum \frac{1}{n}$ iraksak olduğunda

$\sum \frac{\ln n}{n}$ iraksaktır.

$\sum (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n}$ alterne seridir - Leibnitz testi

uygulan.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{\ln n}{n}$

$\forall x \in (1, \infty)$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ dir.

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ($x \in (1, \infty)$), monotonluğuna bakalım.

$f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow$

$1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

x	$-\infty$	0	e	∞
f'	+		+	-
f			↗	↘

f, $[e, +\infty)$ da azalır.

Leibnitz testine göre $\sum_{n=e}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n}$ serisi yakınsak.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n}$ yakınsak $\Rightarrow$ verilen serinin yakınsak.

Soru 3 $x \in \mathbb{R}$ için $f_k(x) = \frac{k \sin x - 1}{k}$

ise $f_k(x) \rightarrow f(x)$ noktasal limitini bulunur. Bu yakınsama düzgün müdür? Neden.

Çöz $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k \sin x - 1}{k} - \sin x \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$$

olduğunda $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x) = \sin x$ (noktasal) dir.

$$C_k = \sup \{ |f_k(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R} \} = \frac{1}{k} \quad \forall k$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} C_k = 0$ olduğunda $f_k \rightarrow f$ düzgündür.

$x \in [0,1]$ için
Soruy a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n+x^2)^2}$ dx serisi düğün

Yakınsak mıdır?

b) $\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n+x^2)^2} \right) dx$ integralinin değerini bulur.

Çöz: a) $\forall x \in [0,1], f_n(x) = \frac{x}{(n+x^2)^2}, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x)| = \left| \frac{x}{(n+x^2)^2} \right| = \frac{x}{(n+x^2)^2}$$

$$f_n'(x) = \frac{(n+x^2)^2 - 2(n+x^2) \cdot 2x^2}{(n+x^2)^4} = \frac{(n+x^2)(n+x^2-4x^2)}{(n+x^2)^4}$$

$$f_n'(x) = \frac{n-3x^2}{(n+x^2)^2} = 0 \Rightarrow n=3x^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{n}{3}} \quad x \in [0,1]$$

x	$-\infty$	0	$\sqrt{n/3}$	1
f_n'	/	/	+	-
f_n	/	/	↗	↘
			max	

$$|f_n(x)| = \frac{x}{(n+x^2)^2} \leq f_n\left(\sqrt{\frac{n}{3}}\right) = \frac{\sqrt{n/3}}{(n+n/3)^2} = \frac{\sqrt{n/3}}{16n^2/9}$$

$$|f_n(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{1}{n^{3/2}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n = \frac{3\sqrt{3}}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \quad p=3/2 > 1$$

$\sum M_n$ yakınsak $\Rightarrow$ weier... $\sum f_n(x)$ düğün
 yakı.

(5) $\forall n$, f_n le sınırlı $\sum f_n$ dır mı yab.

old.

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n+x^2)^2} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x dx}{(n+x^2)^2} \quad \text{ok.}$$

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(n+x^2)^2} = \frac{1}{2} \int_n^{n+1} u^{-2} du = -\frac{1}{2} \frac{1}{u} \Big|_n^{n+1}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right]$$

$$u = n+x^2$$

$$du = 2x dx$$

$$x dx = \frac{du}{2}$$

$$x=0 \Rightarrow u=n$$

$$x=1 \Rightarrow u=n+1$$

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(n+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x dx}{(n+x^2)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right]$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1.$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 = 1/2.$$

Soru 5
a) $a_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right), n - \sqrt{n^2 + n} \right)$

olmak üzere $\mathbb{R}^2$ de (a_n) dizisinin karakterini belirleyiniz. Yakınsak ise limitini bulunuz.

Çözüm:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n^2 - n}{n^2 + \sqrt{n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + \sqrt{n^2 + n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$(a_n) \subset \mathbb{R}^2$ yakınsaktır ve limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \left(1, -\frac{1}{2} \right) \text{ dir.}$$

b) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} (0,3)^{1/n}, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{n} \right)^n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$

$\mathbb{R}^3$ de verilen serinin karakterini belirleyiniz

Çöz: $\lim_{n \rightarrow \infty} (0,3)^{1/n} = 1 \neq 0$ old. $\sum_{n=1}^{\infty} (0,3)^{1/n}$ serisi

ıraksaktır. Dolayısıyla verilen seri $\mathbb{R}^3$ de ıraksak.

7. Soru:
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (x+2)^{n-1}}{n+1}$$

kuvvet serisinin yakınsaklık yarısapını ve yakınsaklık aralığını bulun.

Çözüm:
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (x+2)^{n-1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (x+2)^k}{k+2}$$

yani $a_k = \frac{(-1)^k}{k+2}$ olup, r serinin yakınsaklık

yarısapı olmalı orası

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^k \cdot (k+3)}{(k+2) \cdot (-1)^{k+1}} \right|$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+3}{k+2} = 1 \quad r = 1$$

$|x+2| < 1 \Rightarrow -3 < x < -1$ yakınsaklık aralığıdır.

⑥ a) $U = (-\frac{1}{2}, +\infty)$, $V = (-\infty, \frac{1}{4})$

$$\mathbb{Z} \subset U \cup V, \quad \mathbb{Z} \cap U = \{1, 2, 3, \dots\} \neq \emptyset,$$

$$\mathbb{Z} \cap V = \{\dots, -2, -1, 0\} \neq \emptyset, \quad U \cap V = \emptyset$$

olduğundan $\mathbb{Z}$ bağlantılı değildir.

b) $A' = \{0\}$ olup, $0 \notin A$ olduğundan A kapalı değildir.

Dolayısıyla kompakt değildir.