1. soru	2. soru	3. soru	4. soru	5. soru	6. soru	7. soru	8. soru	Toplam

Adı Soyadı: = CEVAP ANAHTARI = **28.06.2024**

Numara:

MAT 212 ANALİZ IV DERSİ FİNAL SINAVI SORULARI

1) $A \subset \mathbb{R}^n$ açık küme olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}^m$ bir fonksiyon ve $x_0 \in A$ olsun. Eğer f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilir ise f fonksiyonunun bu noktada sürekli olduğunu gösteriniz (10 puan).

2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon ve

$$D_1 f(0,0,0) = 2,\ D_2 f(0,0,0) = D_3 f(0,0,0) = 3$$

olmak üzere $g(u,v) = f(u-v, u^2-1, 3v-3)$ olsun. O halde $D_2 g(1,1)$ kısmi türevini bulunuz (15 puan).

3) $f : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0, y \neq 0\} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$f(x,y,z) = x^2 z - yz^2 + xyz \ln\left(\frac{y}{x}\right)$ fonksiyonu veriliyor. O halde

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 3f(x,y,z)$$

olduğunu gösteriniz (15 puan).

4) $F(x,y,z) = e^{-xy} + 2z - e^z = 0$ denkleminin $z_0 \neq \ln 2$ olacak şekilde $F(x_0,y_0,z_0) = 0$ koşulunu sağlayan bir $P = (x_0,y_0,z_0)$ noktası civarında kapalı olarak bir $z = f(x,y)$ fonksiyonu tanımladığını gösteriniz (10 puan).

5) $f(x,y) = xy$ fonksiyonunun $x^2 + y^2 = 1$ birim çemberi üzerindeki mutlak maksimum ve mutlak minimum **değerlerini** bulunuz (10 puan).

6) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ olmak üzere $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dA$ integralini hesaplayınız (10 puan).

7) D, $\mathbb{R}^3$ de $x^2 + y^2 = 4$ silindiri ile $z = 0$ ve $z = 3$ düzlemleri arasında kalan bölge olmak üzere $\iiint_D (x^2 + yz^2)\, dV$ integralini silindirik koordinatlarda ifade ediniz (10 puan).

8) $A \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Aşağıda boş bırakılan yerlere Doğru veya Yanlış yazınız (20 puan).

a) Fonksiyon A kümesindeki her noktada sürekli ise düzgün süreklidir. ...Yanlış...

b) Eğer $x_0 \in A'$ olmak üzere $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ ise fonksiyon x_0 noktasının uygun bir komşuluğunda sınırlıdır. ...Doğru...

c) Eğer $x_0 \in A$ ve $x_0 \notin A'$ ise fonksiyon x_0 noktasında süreklidir. ...Doğru.

d) Eğer A bağlantılı bir küme ve f sürekli bir fonksiyon ise $f(A)$ kümesi $\mathbb{R}$ de bağlantılıdır. ...Doğru...

e) Eğer f düzgün sürekli bir fonksiyon ise Lipschitz koşulunu sağlar. ...Yanlış...

Not: 8. Sorudaki her şık 4 puandır. Süre 90 dakikadır.

Dr. Erdem TOKSOY

= CEVAP ANAHTARI =

1) $A \subset \mathbb{R}^n$ açık küme olmak üzere $f: A \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu $x_0 \in A$ noktasında türevlenebilir olsun. Böylece $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $0 < \|h\| < \delta_1 \leq 1$ iken

$$\frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)\|}{\|h\|} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \ldots (1)$$

olacak şekilde bir $\delta_1 > 0$ sayısı ve $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ doğrusal fonksiyonu vardır. (1) den

$$\|f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)\| < \frac{\varepsilon}{2}\|h\|$$

olup $\|h\| < 1$ olduğundan

$$\|f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \ldots (2)$$

yazılır. Ayrıca $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ doğrusal fonksiyonu sürekli olduğundan aynı $\varepsilon > 0$ sayısı için $0 < \|h\| < \delta_2$ iken

$$\|L(h)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \ldots (3)$$

olacak şekilde bir $\delta_2 > 0$ sayısı vardır. Eğer $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$ alınırsa (2) ve (3) kullanılarak aynı $\varepsilon > 0$ sayısı için $0 < \|h\| < \delta$ iken

$$\begin{aligned}\|f(x_0+h) - f(x_0)\| &= \|f(x_0+h) - f(x_0) - L(h) + L(h)\| \\ &\leq \|f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)\| + \|L(h)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

yazılır. Yani $\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ olur. Bu takdirde f, x_0 noktasında süreklidir.

(2) $x = u-v$, $y = u^2-1$ ve $z = 3v-3$ olsun. Ayrıca bir h fonksiyonunu

$h(u,v) = (u-v,\ u^2-1,\ 3v-3)$ biçiminde alalım. Böylece $g = f\circ h$ olur. Yani

$$g = f\circ h : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
$$(u,v) \longrightarrow h(u,v) = (x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z)$$

biçimindedir. Bileşke fonksiyonun türevi gereği

$$Dg(u,v) = Df(h(u,v)).Dh(u,v) = Df(x,y,z).Dh(u,v)$$

olur. Buradan

$$Dg(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}_{1\times3} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}_{3\times2}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}_{1\times3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2u & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} + 2u\frac{\partial f}{\partial y} & -\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

yazılır. O halde

$$D_1 g(u,v) = D_1 f(x,y,z) + 2u\, D_2 f(x,y,z),\quad D_2 g(u,v) = -D_1 f(x,y,z) + 3\, D_3 f(x,y,z)$$

bulunur. $x = u-v$, $y = u^2-1$ ve $z = 3v-3$ olması dikkate alınırsa

$$D_2 g(1,1) = -D_1 f(0,0,0) + 3\, D_3 f(0,0,0) = -2+9 = 7$$

elde edilir.

(3) $\forall t>0$ için

$$f(tx,ty,tz) = t^3x^2z - t^3yz^2 + t^3xyz\ln\left(\frac{y}{x}\right) = t^3. f(x,y,z)$$

olduğundan f 3. dereceden homojendir. Böylece Euler bağıntısından

$$x.\frac{\partial f}{\partial x} + y.\frac{\partial f}{\partial y} + z.\frac{\partial f}{\partial z} = 3f(x,y,z)$$

elde edilir.

(4) $F_x(x,y,z) = -ye^{-xy}$, $F_y(x,y,z) = -xe^{-xy}$ ve $F_z(x,y,z) = 2-e^{z}$ olup F nin 1. mertebeden kısmi türevleri var ve süreklidir. Böylece $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$ olur. Şimdi $z_0 \neq \ln 2$ olan ve $F(x_0,y_0,z_0) = 0$ koşulunu sağlayan bir $P = (x_0,y_0,z_0)$ noktasını alalım. Burada $z_0 \neq \ln 2$ olduğundan $F_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$ olur. O halde Kapalı fonksiyon teoreminin koşulları sağlanır. Böylece (x_0,y_0) noktasının bir $B((x_0,y_0),\delta)$ komşuluğunda $z = f(x,y)$ olacak şekilde $F(x,y,f(x,y)) = 0$ koşulunu sağlayan bir tek fonksiyon vardır.

(5) Lagrange Çarpanlar Metodunu kullanalım. Öncelikle $g(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$ fonksiyonunu alalım. Burada

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (y,x) \quad \text{ve} \quad \operatorname{grad} g(x,y) = (2x,2y)$$

olup

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \lambda \operatorname{grad} g(x,y) \quad \text{ve} \quad g(x,y) = 0$$

koşullarını sağlayan noktaları bulalım.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \lambda \operatorname{grad} g(x,y) \Rightarrow (y,x) = (2\lambda x, 2\lambda y)$$
$$\Rightarrow y = 2\lambda x, \quad x = 2\lambda y$$

olup $\lambda = \dfrac{y}{2x} = \dfrac{x}{2y}$ olduğundan

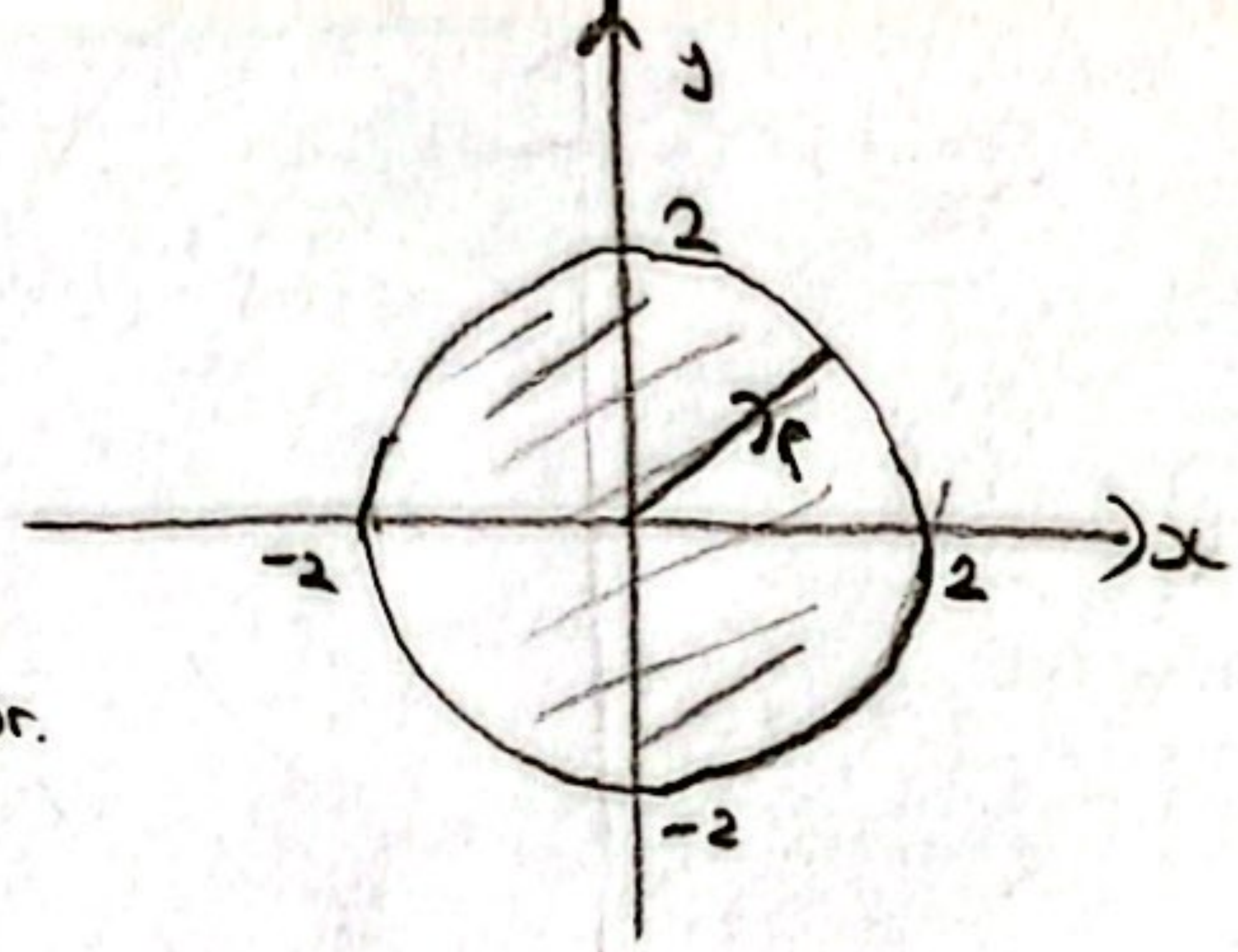
$$2y^2 = 2x^2 \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (y-x)(y+x) = 0 \Leftrightarrow x = y, \; x = -y$$

olur. $x = y \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$ ve $x = -y \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$ bulunur. Ayrıca $g(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$ koşulu sağlanmalıdır. $x = y$ ise $2x^2 = 1$ olup $x = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$ $x = -y$ ise $x = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$ olur. Böylece $x = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $y = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$ için

$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $P_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ve $P_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ noktaları bulunur.

$f(P_1) = f(P_4) = \frac{1}{2}$, $f(P_2) = f(P_3) = -\frac{1}{2}$ olduğundan $-\frac{1}{2}$ mutlak minimum ve $\frac{1}{2}$ mutlak maksimum değerdir.

6) D bölgesini çizelim.



Kutupsal koordinatlara geçilirse

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$ olup $|J| = r$ olur.

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2 e^{-r^2}.r\,dr.d\theta$$

yazılır. $\int_0^2 e^{-r^2}.r\,dr$ integralinde $r^2=u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$2r.dr = du \iff dr = \frac{du}{2r}$ ve $r_0 = 0 \Rightarrow u_0 = 0$, $r_1 = 2 \Rightarrow u_1 = 4$ olur. Böylece

$$\int_0^2 e^{-r^2}.r\,dr = \frac{1}{2}\int_0^4 e^{-u}du = \frac{-1}{2}e^{-u}\Big|_0^4 = -\frac{1}{2}\left(e^{-4}-1\right) = \frac{1}{2}\left(1-e^{-4}\right)$$

olur. Buradan

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dA = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 e^{-r^2}.r.dr\right)d\theta = \frac{1}{2}(1-e^{-4})\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{1}{2}(1-e^{-4})\left[2\pi-0\right] = \pi\left(1-e^{-4}\right)$$

elde edilir.

7) Silindirik koordinatlara geçelim. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ olup D bölgesini

ve $f(x,y,z) = x^2 + yz^2$ fonksiyonunu silindirik koordinatlarda ifade ederek

integral ($|J| = r$ olmak üzere)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^3 \left(r^2\cos^2\theta + r\sin\theta.z^2\right).r.\,dz\,dr\,d\theta$$

biçimindedir