1. soru	2. soru	3. soru	4. soru	5. soru	6. soru	7.soru	Toplam

Adı Soyadı: 03.07.2025
Numarası:

2024-2025 ÖĞRETİM YILI MAT 212 ANALİZ IV BÜTÜNLEME SINAV SORULARI

1. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, (x,y)=(0,0)\end{cases}$ fonksiyonu $(0,0)\in\mathbb{R}^2$'de sürekli midir? Neden?

2. $f(x,y)=\sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz. Ayrıca tanım kümesi üzerinde dif.bilir olup olmadığını inceleyiniz.

3. $f(x,y)=y^3+x^2-6xy+4y-5$ fonksiyonu ve $p=(-1,1), q=(3,2)$ noktaları verilsin. Ortalama Değer Teoremini ifade edip uygulayarak C noktasını bulunuz.

4. $u=e^x, v=x\sin y, w=y\cos x$ olmak üzere $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(u,v,w)=uv+uw^2$ olsun. Bu durumda $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $g(x,y)=\big(u(x,y),v(x,y),w(x,y)\big)$ dönüşümü için $J_{fog}(x,y)$'yi bulunuz.

5. $12m^2$'lik bir kartondan üstü açık bir kutu yapılmak isteniyor. Kutunun hacminin maksimum olması için kutunun x,y,z kenarları ne olmalıdır?

6. $u=f_1(x,y,z)=x+xyz$, $v=f_2(x,y,z)=y+xy$, $w=f_3(x,y,z)=z+2x+3z^2$ denklem sisteminin $(0,0,0)$'ın bir civarında x,y ve z ye göre (u,v,w cinsinden) Çözülüp çözülemeyeceğini inceleyiniz. Neden?

7. D_{xyz}, $x-y=1$, $x-y=2$, $x+z=-1$, $x+z=1$, $2x-3y+2z=0$, $2x-3y+2z=1$ Düzlemleri ile sınırlanan bölge olduğuna göre $\iiint\limits_{D_{xyz}}(x-y-2)^3(x+z)^2(2x-3y+2z)^2\,dxdydz$ integralini $u=x-y$, $v=x+z$, $w=2x-3y+2z$ değişken değiştirmesini yaparak hesaplayınız.

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

Not: 1. soru 10 puan, diğerleri 15 er puandır.
Başarılar..

2024-2025, MAT212 ANALİZ IV BÜTÜNLEME ÇÖZÜMLERİ

1) $x=y^2$ ile yaklaşılırsa $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^4}{2y^4} = 1/2$

$y=2x$ " " $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4x^3}{2^4 . x^6} = 0$

$0 \neq 1/2$ old. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ limiti yoktur. Dolayısıyla

$(0,0)\in\mathbb{R}^2$ de sürekli değildir.

2) $D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0, y\neq 0\} = (\mathbb{R}-\{0\})\times(\mathbb{R}-\{0\})$

$f_x = \frac{1}{y}\cdot \cos\frac{x}{y}\cdot \cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x^2}\cdot \sin\frac{x}{y}\cdot \sin\frac{y}{x}$

f_x, D_f üzerinde süreklidir.

$f_y = -\frac{x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\cdot\sin\frac{x}{y}\cdot\sin\frac{y}{x}$

f_y, D_f üzerinde süreklidir.

Dolayısıyla $f(x,y)$ fonksiyonunun tanım kümesinde kısmi türevleri var ve sürekli olduğundan dif. bilirdir.

3) $0<t<1$ olmak üzere $c=(1-t).P+t.Q=(1-t)(-1,1)+t(3,2)$
$=(4t-1,\ 1+t)$

olup, O.D.T. dolayı
$f(Q)-f(P)=Df(c)(Q-P) \Rightarrow$

$f_x(x,y)=2x-6y$, $f_y(x,y)=3y^2-6x+4 \Rightarrow$

$f_x(c)=f_x(4t-1,1+t)=2(4t-1)-6(1+t)=2t-8$

$f_y(c)=f_y(4t-1,1+t)=3(1+t)^2-6(4t-1)+4=3t^2-18t+13$

$f(3,2)-f(-1,1)=(f_x(c),f_y(c))((3,2)-(-1,1))$

$-16-7=(2t-8,\ 3t^2-18t+13)(4,1)$

$-23=8t-32+3t^2-18t+13 \Rightarrow -23=3t^2-10t-19$

$3t^2-10t+4=0 \Rightarrow \Delta=10^2-4.3.4=52 \quad t_{1,2}=\dfrac{10\mp\sqrt{52}}{6}$

$t_1=\dfrac{10+\sqrt{52}}{6}\notin(0,1)$, $t_2=\dfrac{10-\sqrt{52}}{6}=\dfrac{5-\sqrt{13}}{3}\in(0,1)$

$c=\left(4.\frac{5-\sqrt{13}}{3}-1,\ 1+\frac{5-\sqrt{13}}{3}\right)=\left(\frac{17-4\sqrt{13}}{3},\ \frac{8-\sqrt{13}}{3}\right)$

4) $\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f\circ g"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$

$(f\circ g)(x,y) = f(g(x,y)) = f(u,v,w) = uv + uw^2$
$= e^x \cdot x\sin y + e^x y^2 \cos^2 x$

$J_{f\circ g}(x,y) = J_f\, g(x,y)\, J_g(x,y)$

$$J_g(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ \sin y & x\cos y \\ -y\sin x & \cos x \end{bmatrix}$$

$$J_f\, g(x,y) = J_f(u,v,w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v+w^2 & u & 2uw \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x\sin y + y^2\cos^2 x & e^x & 2e^x y\cos x \end{bmatrix}$$

$$J_{f\circ g}(x,y) = \begin{bmatrix} x\sin y + y^2\cos^2 x & e^x & 2e^x y\cos x \end{bmatrix}_{1\times 3} \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ \sin y & x\cos y \\ -y\sin x & \cos x \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$= \begin{bmatrix} e^x x\sin y + e^x y^2\cos^2 x + e^x \sin y - 2e^x y^2 \sin x & e^x x\cos y + 2e^x y\cos^2 x \end{bmatrix}$$

5) Kutunun hacmi $V = xyz$, alanı $xy + 2yz + 2xz = 12$

$\Rightarrow x = \dfrac{12-xy}{2(x+y)} \Rightarrow V = xy\,\dfrac{12-xy}{2(x+y)} = \dfrac{12xy - x^2y^2}{2(x+y)}$

$V_x = V_y = 0 \Rightarrow y^2(12-2xy-x^2)=0 \quad x^2(12-2xy-y^2)=0$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 12-2xy-x^2=0 \\ 12-2xy-y^2=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x,y)=(2,2)$

Böylece $z=1$ bulunur. $V = 2.2.1 = 4$ dür.

6)

⑥ $$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1+yz & xz & xy \\ y & 1+x & 0 \\ 2 & 0 & 1+6z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

old. $(0,0,0)$ ın bir civarında x, y ve z ye göre çözülebilir.

⑦ $1 \leq u \leq 2, \ -1 \leq v \leq 1, \ 0 \leq w \leq 1$ olur.

$$J_g = \frac{\partial(g_1, g_2, g_3)}{\partial(u,v,w)} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{1}{3} \quad \text{old.}$$

$$\iiint_{D_{xyz}} (x-y-z)^3 (x+z)^2 (2x-3y+2z^2)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_1^2 (u-2)^3 v^2 w^2 \frac{1}{3}\, du\, dv\, dw = -\frac{1}{54}$$