1. soru	2. soru	3. soru	4. soru	5. soru	6. soru	Toplam

Adı Soyadı: = CEVAP ANAHTARI = **30.04.2024**

Numara:

MAT 212 ANALİZ IV DERSİ ARA SINAV SORULARI

1) $A \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu, $x_0 \in A'$ ve $L \in \mathbb{R}^m$ noktaları verilsin. O halde $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ ise $\lim_{x \to x_0} \|f(x)\| = \|L\|$ olduğunu gösteriniz (10 puan).

2) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{2\cos(x+y) - 3 + e^{-(x^2+y^2)}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$ fonksiyonu veriliyor.

a) Bu fonksiyonun $(0,0)$ noktasındaki limitini araştırınız (10 puan).

b) Bu fonksiyonun $(0,0)$ noktasında türevlenebilir olup olmadığını araştırınız (10 puan).

3) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında türevlenebilir olup olmadığını araştırınız (10 puan).

4) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x,y,z)$ fonksiyonunun türev matrisini (Jacobian matrisini) bulunuz (10 puan).

5) $f(x,y) = xy + \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}$ fonksiyonu ve $P = (1,1)$ noktası verilsin.

a) Bu fonksiyonun P noktasındaki en büyük ve en küçük yönlü türevlerini bulunuz (20 puan).

b) Bu fonksiyonun P noktasındaki yönlü türevi -4 olacak şekilde bir $\vec{v}$ birim vektörü bulunabilir mi? Bulunabilirse bir tane $\vec{v}$ birim vektörü bulunuz. Bulunamazsa nedenini açıklayınız (10 puan).

6) $A \subset \mathbb{R}^n$ açık alt küme olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x_0 \in A$ noktası verilsin. Aşağıda boş bırakılan yerlere Doğru veya Yanlış yazınız (20 puan).

a) Fonksiyon x_0 noktasında türevlenebilir ise x_0 noktasında süreklidir. ..Doğru....

b) Fonksiyon x_0 noktasında sürekli değil ise fonksiyonun x_0 noktasında birinci mertebeden kısmi türevleri yoktur. ....Yanlış...

c) Fonksiyonun x_0 noktasında her yönde yönlü türevi varsa fonksiyon x_0 noktasında türevlenebilirdir. ....Yanlış....

d) Fonksiyonun x_0 noktasında birinci mertebeden kısmi türevleri varsa fonksiyon x_0 noktasında türevlenebilirdir. ....Yanlış...

e) Fonksiyon x_0 noktasında türevlenebilir ise fonksiyonun birinci mertebeden kısmi türevleri vardır. ....Doğru....

Not: 6. Sorudaki her şık 4 puandır. Süre 90 dakikadır.

Dr. Erdem TOKSOY

1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ olsun. O halde limit tanımından $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $0 < \|x - x_0\| < \delta$ olan $\forall x \in A$ için

$\| f(x) - L \| < \varepsilon$ ... (1)

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Aynı $\varepsilon > 0$ sayısı ve $0 < \|x - x_0\| < \delta$ olan $\forall x \in A$ için ters üçgen eşitsizliği ve (1) kullanılarak

$\big| \|f(x)\| - \|L\| \big| \leq \|f(x) - L\| < \varepsilon$

yazılır. Bu takdirde $\lim_{x \to x_0} \|f(x)\| = \|L\|$ olur.

2) a) Öncelikle ardışık limitlere bakalım.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{xy}{2\cos(x+y) - 3 + e^{-(x^2+y^2)}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{2\cos x - 3 + e^{-x^2}}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{xy}{2\cos(x+y) - 3 + e^{-(x^2+y^2)}}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{2\cos y - 3 + e^{-y^2}}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

olur. Şimdi $(0,0)$ noktasına $x = -y$ doğrusu boyunca yaklaşalım. Böylece

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{2\cos(0) - 3 + e^{-2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{-1 + e^{-2x^2}} \to \frac{0}{0}$$

belirsizliği vardır. Eğer L'Hospital yapılırsa

Scanned with CamScanner

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{-1+e^{-2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{-4x.e^{-2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2.e^{-2x^2}} = \frac{1}{2}$$

bulunur. Bu takdirde fonksiyonun $(0,0)$ da limiti yoktur.

b) f fonksiyonunun $(0,0)$ da limiti var olmadığından f, $(0,0)$ da süreksizdir. O halde f, $(0,0)$ noktasında türevlenemez.

3) Öncelikle $(0,0)$ noktasında kısmi türevlere bakalım.

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

olup $\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$, $\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} -\frac{h}{h} = -1$ olduğundan

$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ limiti yoktur. O halde $f_x(0,0)$ kısmi türevi yoktur. Bu takdirde f, $(0,0)$ da türevlenemezdir.

4) Burada $f_1(x,y,z) = x$, $f_2(x,y,z) = y$, $f_3(x,y,z) = z$ olup türev matrisi

$$J_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

bulunur.

5) a) $f_x(x,y) = y + \frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}$, $f_y(x,y) = x - \frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}$ olup f_x ve f_y kısmi türevleri $P=(1,1)$ de var ve sürekli olduğundan f, P de türevlenebilirdir.

$f_x(1,1) = 3$ ve $f_y(1,1) = -1$ olup $\text{grad} f(1,1) = (3,-1)$ olur. Böylece

$\|\text{grad} f(1,1)\| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ olup P noktasındaki en büyük yönlü türev $\sqrt{10}$, en küçük yönlü türev $-\sqrt{10}$ bulunur.

Scanned with CamScanner

5) b) a şıkkından herhangi bir $\vec{v}$ birim vektörü yönündeki

$D_{\vec{v}} f(P)$ yönlü türevi için

$$-\sqrt{10} \leq D_{\vec{v}} f(P) \leq \sqrt{10}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$-4 < -\sqrt{10}$

olduğundan $D_{\vec{v}} f(P) = -4$ olacak şekilde bir $\vec{v}$ birim vektörü bulunamaz.

Scanned with CamScanner