1	2	3	4	5	6	7	Toplam

Adı Soyadı:
Numarası :

MAT 212 ANALİZ IV DERSİ ARASINAV SORULARI

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y+xy)\cos\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} = 0$ olduğunu gösteriniz*(ε, δ lı tanımı kullanarak).*

(10 puan)

2) $f(x,y) = \begin{cases} x^3\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + y^2, & (x,y) \neq (0,0) \\ y^2 \quad , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor.

a) $f_x(x,y) = ?$ **(10 puan)**

b) $f_y(x,y) = ?$ **(5 puan)**

c) f fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında *türevlenebilir* olduğunu tanımı kullanarak gösteriniz.

(10 puan)

3) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(u,v,w) = u.v + u.w^2, u = e^x, v = x\sin y, w = y\cos x$ olsun.

$$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, g(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y), w(x,y)\big)$$

dönüşümü için $f \circ g$ nin *türevlenebilir* olduğunu gösterip, $\mathcal{J}_{f\circ g}(x,y)$ matrisini bulunuz.

(15 puan)

4) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bir türevlenebilen fonksiyon olsun. Eğer $u = x^3 f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ ise

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 3u$$

olduğunu gösteriniz. **(10 puan)**

5) $f(x,y,z) = xyz + x^2 + y^2$ fonksiyonu ve $a = (0,0,0)$, $b = (1,1,1)$ noktaları veriliyor. Çok değişkenli fonksiyonlar için ortalama değer teoremi uygulanabilir mi? Yanıtınız evet ise ilgili c sayısını bununuz. **(15 puan)**

6) $\sqrt{x-y} - \ln z - 2 = 0$ yüzeyinin $P(3,-1,1)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulunuz. Açıklayınız. **(15 puan)**

7) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında *dizisel sürekli* olduğunu gösteriniz. **(10 puan)**

Süre 110 Dakikadır...

Başarılar...

13.05.2026

Prof. Birsen S. DUYAR

① $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y+xy)\cos\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{x} = 0$

olduğunu gösteriniz. (ε, δ lı tanımı kullanarak)

<u>Çözüm:</u> $\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta=?$:

$\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ iken $|x|<\delta$, $|y|<\delta$ olur.

$$|f(x,y)-0| = \left|(x+y+xy)\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|+|y|+|x||y|$$
$$< \delta+\delta+\delta^2 < 3\delta$$

olduğundan $\delta = \varepsilon/3$ almak yeterlidir.

② $(x_n,y_n)\neq(0,0)$ olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(0,0)$ olan

her $(x_n,y_n)\subset\mathbb{R}^2$ dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$ dır.

- $x_n=0, y_n\neq 0$ ise $f(x_n,y_n)=f(0,y_n)=\frac{0}{y_n^2}=0\to 0\ (n\to\infty)$
- $x_n\neq 0, y_n=0$ ise $f(x_n,y_n)=f(x_n,0)=\frac{x_n^4}{x_n^2}=x_n^2\to 0\ (n\to\infty)$
- $x_n\neq 0, y_n\neq 0$ ise $f(x_n,y_n)=\frac{x_n^4}{x_n^2+y_n^2}\le\frac{x_n^4}{x_n^2}=x_n^2\to 0\ (n\to\infty)$

o halde $(x_n,y_n)\neq(0,0)$ olan $(x_n)\subset\mathbb{R}$, $(y_n)\subset\mathbb{R}$ dizileri için

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=0=f(0,0)$ olduğundan f dizisel sürekliydir.

2) $f(x,y)=\begin{cases} x^3.\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)+y^2 & , (x,y)\neq(0,0) \\ y^2 & , (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor.

a) $f_x(x,y)=?$ b) $f_y(x,y)=?$

c) f, $(0,0)$ da diferensiyellenebilir mi? Nedenini türev tanımını kullanarak açıklayınız.

Çözüm: a) $(x,y)\neq(0,0)$ ise

$$f_x(x,y)=3x^2.\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2.x^3}{x^3}.\cos\frac{1}{x^2}=3x^2.\sin\frac{1}{x^2}-2\cos\frac{1}{x^2}$$

$$f_x(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^3.\sin\frac{1}{t^2}-0}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0} t^2.\sin\frac{1}{t^2}=0$$

$$f_x(x,y)=\begin{cases} 3x^2.\sin\frac{1}{x^2}-2\cos\frac{1}{x^2} & , (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

b) $(x,y)\neq(0,0) \Rightarrow f_y(x,y)=2y$,

$$f_y(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2-0}{t}=\lim_{t\to 0} t=0$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases} 2y, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\left[f_x(0,0)(x-0)+f_y(0,0)(y-0)\right]}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3.\sin\frac{1}{x^2}+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\neq ?$$ ($y=mx$ doğrusu boyunca yaklaşılırsa)

$$=\lim_{(x,\to 0}\frac{x^3\sin\frac{1}{x^2}+m^2x^2}{|x|\sqrt{1+m^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x.|x|.\sin\frac{1}{x^2}+m^2.|x|}{\sqrt{1+m^2}}=0$$

$x^3=x^2.x$
$=|x|^2.x$

olduğundan f, $(0,0)$ da diferensiyellenebilirdir.

3) $u=e^x$, $v=x\sin y$, $w=y\cos x$ ve $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(u,v,w)=uv+uw^2$ olsun. Bu durumda $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $g(x,y)=(u(x,y),v(x,y),w(x,y))$ dönüşümü için $J_{(f\circ g)}(x,y)$ yi bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] \arrow[dr, dashed, "f\circ g"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x,y) &= f(g(x,y)) \\ &= f(u,v,w) \\ &= uv+uw^2 \\ &= e^x x\sin y + e^x y^2\cos^2 x\end{aligned}$$

$$J_{f\circ g}(x,y) = J_f(g(x,y)).\, J_g(x,y)$$

$$J_g(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ \sin y & x\cos y \\ -y\sin x & \cos x \end{bmatrix}$$

$$J_f(g(x,y)) = J_f(u,v,w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v+w^2 & u & 2uw \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x\sin y + y^2\cos^2 x & e^x & 2e^x y\cos x \end{bmatrix}$$

$$J_{f\circ g}(x,y) = \begin{bmatrix} x\sin y + y^2\cos^2 x & e^x & 2e^x y\cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ \sin y & x\cos y \\ -y\sin x & \cos x \end{bmatrix}$$

$$J_{f\circ g}(x,y) = \begin{bmatrix} e^x x\sin y + e^x y^2\cos^2 x + e^x\sin y - 2e^x y^2\sin x\cos x & e^x x\cos y + 2e^x y\cos \end{bmatrix}$$

4) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eger

$u = x^3 f\left(\underbrace{\frac{y}{x}}_{v_1}, \underbrace{\frac{z}{x}}_{v_2}\right)$ ise $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 3u$ olduğunu

gösteriniz

<u>Çözüm:</u> $v_1 = \frac{y}{x}$ ve $v_2 = \frac{z}{x}$ olsun

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x^3 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)$$

$$= 3x^2 f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x^3\left(\frac{\partial f}{\partial v_1}\cdot\frac{-y}{x^2} + \frac{\partial f}{\partial v_2}\cdot\frac{-z}{x^2}\right)$$

$$= 3x^2 f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) - xy\frac{\partial f}{\partial v_1} - xz\frac{\partial f}{\partial v_2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3\left(\frac{\partial f}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)$$

$$= x^3\left(\frac{\partial f}{\partial v_1}\cdot\frac{1}{x} + \frac{\partial f}{\partial v_2}\cdot 0\right)$$

$$= x^2\frac{\partial f}{\partial v_1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^3\left(\frac{\partial f}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)$$

$$= x^3\left(\frac{\partial f}{\partial v_1}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial v_2}\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$= x^2\frac{\partial f}{\partial v_2}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 3x^3 f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) - \cancel{x^2 y\frac{\partial f}{\partial v_1}} - \cancel{x^2 z\frac{\partial f}{\partial v_2}} + \cancel{yx^2\frac{\partial f}{\partial v_1}}$$

$$+ \cancel{zx^2\frac{\partial f}{\partial v_2}}$$

$$= 3x^3 f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

18

$$= 3u$$

<u>2. YOL:</u> $u(x,y) = x^3 f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ iken $u(tx, ty) = t^3 x^3 f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ olduğundan

u, 3. dereceden homojen olup $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 3u$ dur

5) $f(x,y,z) = x^2yz + x^2 + y^2$ fonksiyonu $a=(0,0,0)$, $b=(1,1,1)$ noktaları verilsin. Çok değişkenli fonksiyonlar için ortalama değer teoremini uygulayarak uygun c noktasını bulunuz.

<u>Çözüm:</u> $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$ açık, f türevlenebilir, a yı b ye birleştiren doğru parçası tamamen $\mathbb{R}^3$ de kalır.

O halde O.D.T. göre

$$\boxed{f(b) - f(a) = \langle b-a, \text{grad } f(c) \rangle}$$

olacak şekilde a yı b ye birleştiren doğru üzerinde bir c noktası vardır. $(c = a + (b-a)\lambda)$

$b - a = (1,1,1) - (0,0,0) = (1,1,1)$, $f(b) - f(a) = 3 - 0 = 3$

$c = \lambda a + (1-\lambda) b = \lambda(0,0,0) - (1-\lambda)(1,1,1) = (1-\lambda, 1-\lambda, 1-\lambda)$

$\text{grad } f(x,y,z) = (yz + 2x,\ xz + 2y,\ xy)$

$\text{grad } f(c) = ((1-\lambda)(1-\lambda) + 2\cdot(1-\lambda),\ (1-\lambda)(1-\lambda) + 2(1-\lambda),\ (1-\lambda)(1-\lambda))$

$= (3 - 4\lambda + \lambda^2,\ 3 - 4\lambda + \lambda^2,\ 1 - 2\lambda + \lambda^2)$

$3 = \langle (1,1,1), (3-4\lambda+\lambda^2, 3-4\lambda+\lambda^2, 1-2\lambda+\lambda^2) \rangle$

$3 = 3 - 4\lambda + \lambda^2 + 3 - 4\lambda + \lambda^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2$

$3 = 7 - 10\lambda + 3\lambda^2 \Rightarrow 3\lambda^2 - 10\lambda + 4 = 0$

$\Delta = 100 - 4\cdot 3\cdot 4 = 52$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{10 \mp \sqrt{52}}{6} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{5 \mp \sqrt{13}}{3}$, $\lambda = \dfrac{5-\sqrt{13}}{3} \in (0,1)$

$c = (1-\lambda, 1-\lambda, 1-\lambda) \Rightarrow c = \left(1 - \dfrac{5-\sqrt{13}}{3},\ 1 - \dfrac{5-\sqrt{13}}{3},\ 1 - \dfrac{5-\sqrt{13}}{3}\right)$

6) $\sqrt{x-y} - \ln z - 2 = 0$ yüzeyinin $P(3,-1,1)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini yazınız.

Çözüm: $f(x,y,z) = \sqrt{x-y} - \ln z - 2$ olsun.

$f(x,y,z) = 0$ dır. $D_f = \mathbb{R}^3 - \{(x,y,z) : x > y\}$

f fonksiyonu D_f de türevlenebilirdir. Ayrıca

$$\text{grad} f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x-y}}, \frac{-1}{2\sqrt{x-y}}, \frac{-1}{z} \right)$$

$(x,y,z) \neq (0,0,0)$ için

$\text{grad} f(x,y,z) \neq 0$ dır.

$$\text{grad} f(+3,-1,1) = \left(\frac{1}{2\cdot\sqrt{3-(-1)}}, \frac{-1}{2\cdot\sqrt{3-(-1)}}, \frac{-1}{1} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -1 \right)$$ olup,

$P(3,-1,1)$ noktasındaki teğet düzlemin denklemi

$$\left\langle (x-3, y+1, z-1), \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -1\right) \right\rangle = 0$$

$$\frac{1}{4}(x-3) - \frac{1}{4}(y+1) - (z-1) = 0$$

$(x-3) - (y+1) - 4(z-1) = 0$ dır.