1. soru	2. soru	3. soru	4. soru	5. soru	6. soru	7. soru	8. soru	Toplam

Adı Soyadı: CEVAP ANAHTARI 16.07.2024

Numara:

MAT 212 ANALİZ IV DERSİ BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) Çok değişkenli fonksiyonlar için ortalama değer teoremi ifade ediniz (10 puan).

2) $D=(2D_1+D_2)^2$ diferansiyel operatörünün $f(x,y)=\sin(xy)$ fonksiyonu ve $P=(0,\pi)$ noktasındaki değerini bulunuz (15 puan).

3) $f:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq 0, y\neq 0\}\to\mathbb{R}$ olmak üzere

$f(x,y)=x^2y\sin\left(\frac{x}{y}\right)-yx^2\ln\left(\frac{y}{x}\right)$ fonksiyonu veriliyor. O halde

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6f(x,y)$$

olduğunu gösteriniz (15 puan).

4) $f(x,y)=y\ln(x+y)$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulunuz (10 puan).

5) $z=x^2+y^2$ denklemli yüzey üzerinde bir $P=(a,b,c)$ noktası verilsin. O halde $t\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$x=3t+1,\ \ y=t-1,\ \ z=14t-3$$

doğrusu yüzeyin P noktasındaki teğet düzleminde kalacak şekildeki P noktalarını bulunuz (10 puan).

6) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x\leq 1,\ \ x\leq y\leq 1\}$ olmak üzere $\iint_D x\cos(y^3)\,dA$ integralini hesaplayınız (10 puan).

7) $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq 4\}$ olmak üzere $\iiint_D e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dV$ integralini küresel koordinatlarda ifade ediniz (10 puan).

8) $A\subset\mathbb{R}^n$ olmak üzere $f:A\to\mathbb{R}^m$ fonksiyonu verilsin. Aşağıda boş bırakılan yerlere Doğru veya Yanlış yazınız (20 puan).

a) Eğer x_0 noktası A kümesinin bir izole(ayrık) noktası ise fonksiyon x_0 noktasında süreklidir. ……Doğru……

b) Eğer $x_0 \in A$ ve $x_0 \notin A'$ ise fonksiyonun x_0 noktasında limiti araştırılamaz. …Doğru………

c) $n=2,\ m=1$ ve $x_0 \in A'$ olmak üzere x_0 noktasında limit araştırılırken kutupsal koordinatlara geçilerek x_0 noktasında limit bulunursa bu noktada limit vardır ve limit bulunan bu değere eşittir. …Yanlış……

d) $x_0 \in A'$ ve $1 \le i \le m$ olmak üzere f fonksiyonun f_i bileşen fonksiyonlarının x_0 noktasında limitlerinin **var olmaması** f fonksiyonun x_0 noktasında limitini **var olmadığı anlamına gelmez**. …Yanlış……

e) (x_k), A kümesinde bir Cauchy dizisi olsun. Eğer f sürekli bir fonksiyon ise $(f(x_k))$ dizisi de $f(A)$ kümesinde bir Cauchy dizisidir. …Yanlış……

Not: 8. Sorudaki her şık 4 puandır. Süre 90 dakikadır.

Dr. Erdem TOKSOY

① Çok değişkenli fonksiyonlar için ortalama değer teoremi:

$A \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme olmak üzere $f: A \to \mathbb{R}$ türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Ayrıca $a, b \in A$ için a noktasını b noktasına bağlayan doğru parçası A kümesinde kalsın. O halde

$$f(b) - f(a) = Df(c)(b-a)$$

olacak şekilde a ile b noktalarını birleştiren doğru parçası üzerinde bir c noktası vardır.

② $f(x,y) = \sin xy$ fonksiyonu her mertebeden kısmi türeve sahiptir.

$$D = (2D_1 + D_2)^2 = 4D_1^2 + 4D_1D_2 + D_2^2$$

olup
$$Df(x,y) = (4D_1^2 + 4D_1D_2 + D_2^2)f(x,y)$$
$$= 4D_1^2 f(x,y) + 4D_1D_2 f(x,y) + D_2^2 f(x,y)$$

biçimindedir.

$$D_1 f(x,y) = y\cos xy, \quad D_1^2 f(x,y) = -y^2 \sin xy \Rightarrow D_1^2 f(0,\pi) = 0$$

$$D_2 f(x,y) = x\cos xy, \quad D_1D_2 f(x,y) = \cos xy + (-xy\sin xy)$$

olup $D_1D_2 f(0,\pi) = \cos 0 - 0 = 1$ olur.

$D_2^2 f(x,y) = -x^2 \sin xy \Rightarrow D_2^2 f(0,\pi) = 0$ olur. Böylece

$$Df(0,\pi) = 4$$

elde edilir.

③ Verilen fonksiyon tanım kümesi üzerinde C^2 sınıfından bir fonksiyondur. Ayrıca $\forall t > 0$ için

$$f(tx, ty) = t^3 x^2 y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - t^3 y x^2 \ln\left(\frac{y}{x}\right) = t^3 f(x,y)$$

olduğundan f 3. dereceden homojendir. O halde m fonksiyonun homojenlik derecesi olmak üzere $(xD_1 + yD_2)^2 f(x,y) = m(m-1)f(x,y)$ eşitliği sağlanır. Bu takdirde

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6 f(x,y)$$

eşitliği elde edilir.

(4) $f(x,y) = y\ln(x+y)$ fonksiyonunu alalım. Fonksiyonun tanımlı olabilmesi için $x+y>0$ olmalıdır. Yani f nin tanım kümesi $D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ x+y>0\}$ olur.

$$D_1 f(x,y) = \frac{y}{x+y} \quad , \quad D_1^2 f(x,y) = -\frac{y}{(x+y)^2}$$

$$D_2 f(x,y) = \ln(x+y) + \frac{y}{x+y} \quad , \quad D_2^2 f(x,y) = \frac{1}{x+y} + \frac{x+y-y}{(x+y)^2} = \frac{1}{x+y} + \frac{x}{(x+y)^2}$$

ve $D_1D_2 f(x,y) = \frac{1}{x+y} - \frac{y}{(x+y)^2} = \frac{x+y-y}{(x+y)^2} = \frac{x}{(x+y)^2}$

$(x+y)$

bulunur. f fonksiyonu D_f üzerinde C^2 sınıfındandır.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (D_1 f(x,y), D_2 f(x,y)) = \left(\frac{y}{x+y} , \ln(x+y) + \frac{y}{x+y}\right) = (0,0)$$

iken $\frac{y}{x+y} = 0$ olup $y=0$ bulunur. Yine $\ln(x+y)=0 \Rightarrow x+y=1$ olur. O halde $(1,0)$ kritik noktadır.

$$\Delta = D_1^2 f(1,0)\, D_2^2 f(1,0) - (D_1D_2 f(1,0))^2 = -1 < 0$$

bulunur. O halde $(1,0)$ noktası f nin bir semer noktasıdır.

(5) $f(x,y,z) = z - x^2 - y^2$ fonksiyonunu alalım. O halde $\operatorname{grad} f(x,y,z) = (-2x, -2y, 1)$ olur. $P=(a,b,c)$ için $\operatorname{grad} f(P) = (-2a, -2b, 1)$ P noktasından geçen teğet düzlemin normalidir. Ayrıca P yüzey üzerinde bir nokta olduğundan yüzey denklemini sağlar. Yani $c = a^2 + b^2$ ... (1) dir. P den geçen teğet düzlemin denklemi

$$-2a(x-a) - 2b(y-b) + (z-c) = 0 \Rightarrow -2ax + 2a^2 - 2by + 2b^2 + z - c = 0 \quad \text{(1) den}$$
$$\Rightarrow -2ax - 2by + 2(a^2+b^2) + z - (a^2+b^2) = 0$$
$$\Rightarrow -2ax - 2by + z + (a^2+b^2) = 0$$

olur. Verilen doğru teğet düzlemin denklemini sağlamalıdır. O halde

$$-2a(3t+1)-2b(t-1)+14t-3+a^2+b^2=0$$

olup

$$-6at-2a-2bt+2b+14t-3+a^2+b^2=0 \iff t(-6a-2b+14)+(-2a+2b-3+a^2+b^2)=0$$

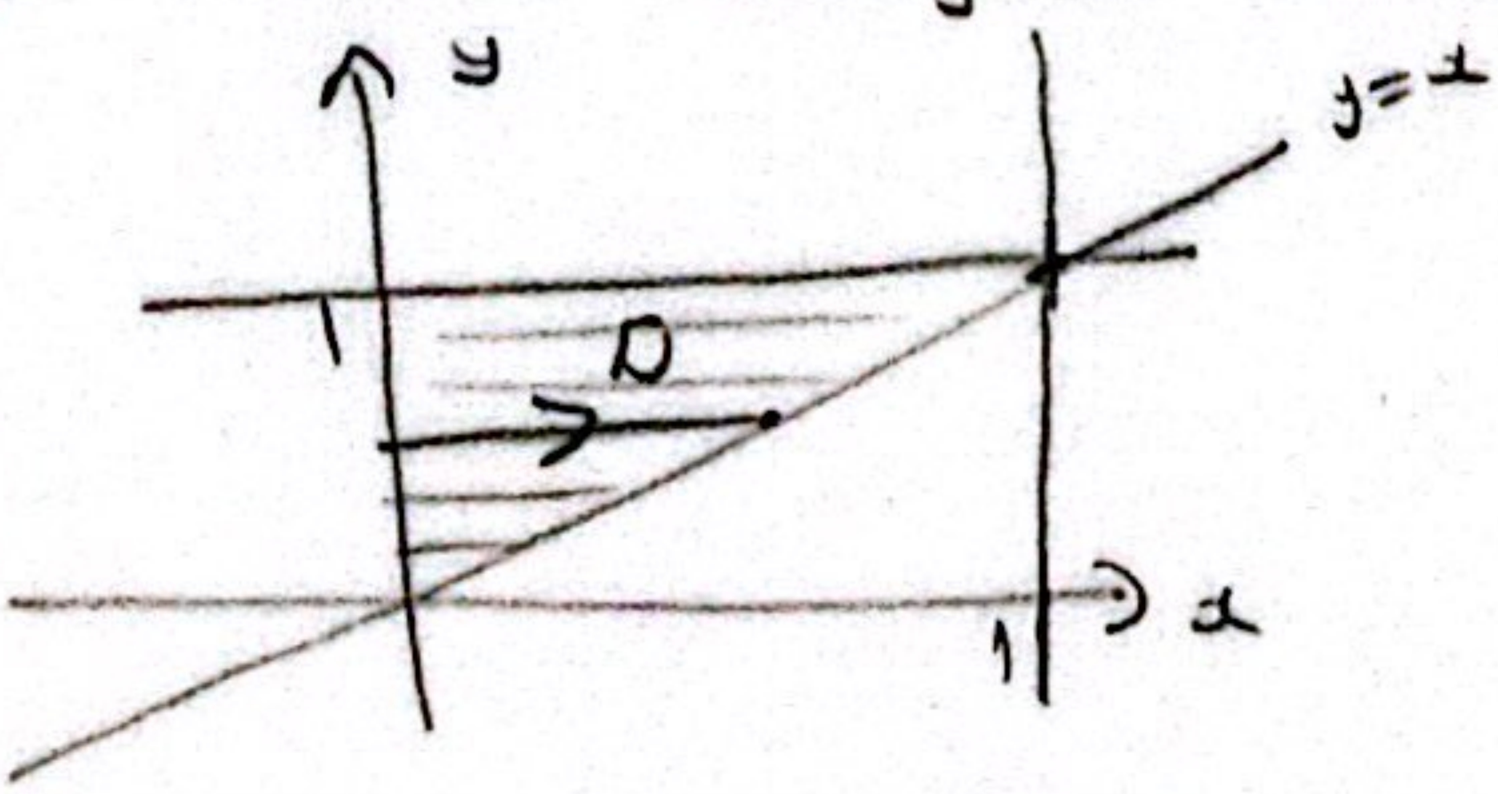
bulunur. Buradan

$$\begin{cases} -3a-b+7=0 \quad \dots(2) \\ -2a+2b-3+a^2+b^2=0 \quad \dots(3) \end{cases} \Rightarrow \boxed{b=7-3a} \quad (3)\text{ de yazılırsa}$$

$$-2a+14-6a-3+a^2+49-42a+9a^2=0 \Rightarrow 10a^2-50a+60=0$$
$$\Rightarrow a^2-5a+6=0$$

olup $a=2$ veya $a=3$ olur. $a=2 \Rightarrow b=1$ ve $a=3 \Rightarrow b=-2$ bulunur. $a=2$ ve $b=1$ iken (1) den $c=5$, $a=3$ ve $b=-2$ iken $c=13$ bulunur. Böylece $P_1=(2,1,5)$ ve $P_2=(3,-2,13)$ noktaları elde edilir.

6) Öncelikle D bölgesini çizelim.



$$\iint_D x\cos y^3\,dA = \int_0^1\int_0^y x\cos y^3\,dx\,dy$$
$$= \int_0^1\left[\int_0^y x\cos y^3\,dx\right]dy$$
$$= \int_0^1\left[\frac{x^2}{2}\cos y^3\Big|_0^y\right]dy$$
$$= \int_0^1 \frac{y^2}{2}\cos y^3\,dy$$

olur. Son integralde $y^3=u \Rightarrow 3y^2\,dy=du \Rightarrow dy=\frac{du}{3y^2}$ olur. Sınırlarda değişir. $y_0=0 \Rightarrow u_0=0$ ve $y_1=1 \Rightarrow u_1=1$ olup

$$\iint_D x\cos y^3\,dA = \int_0^1 \frac{y^2}{2}\cos y^3\,dy = \frac{1}{6}\int_0^1 \cos u\,du = \frac{1}{6}\left[\sin u\Big|_0^1\right] = \frac{\sin 1}{6}$$

elde edilir.

7) Bölge $\mathbb{R}^3$ de 2 yarıçaplı $(0,0,0)$ merkezli küre yüzeyi ve içidir

Küresel koordinatlara geçilirse

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ y = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

olup burada $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ ve $0 \leq \rho \leq 2$ biçimindedir

$x^2+y^2+z^2 = \rho^2$ ve $|J| = \rho^2 \sin\varphi$ olup integral küresel koordinatlarda

$$\iiint_D e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2} e^{\rho} \cdot \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

biçimindedir.