

Ad-soyad :

Numara :

Cevap Anahtarı

Lineer Cebir II Bütünleme Sınavı Soruları

30.06.2025

1) Aşağıdaki soruları yanında bulunan parantez içine doğru ise "D", yanlış ise "Y" yazarak cevaplayınız (Her şık 4 p).

- (D) Aynı özdeğere karşılık gelen iki özvektörün toplamı da özvektördür.
(D) Vektör uzayları arasında izomorf olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.
(Y) Ortogonal bir kümede her vektörün boyu 1 dir.
(D) Tanım ve görüntü uzayları aynı olan iki lineer dönüşümün toplamı da bir lineer dönüşümdür.
(Y) Bir reel matrisin karakteristik polinomunun tüm kökleri reel ise matris köşegenleştirilebilir.

2) $\mathbb{R}^3$ te $u = (1, -2, -3)$ ve $v = (2, 3, 1)$ vektörleri veriliyor.

a) $\mathbb{R}^3$ teki standart iç çarpıma göre u ve v vektörlerinin normlarını bulunuz (10 p).

b) u ve v vektörleri arasındaki açıyı bulunuz (10 p).

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. A matrisinin

a) karakteristik polinomunu bulunuz (10 p).

b) Cayley – Hamilton Teoremini sağladığını gösteriniz (10 p).

4) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

a) $D = P^{-1}AP$ köşegen matris olacak şekilde bir P matrisi bulunuz (10 p).

b) a şikkını kullanarak A^7 yi hesaplayınız (10 p).

5) $L: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineer dönüşümünün standart bazlara göre matrisi $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ olarak veriliyor.

a) L lineer dönüşümünü belirleyiniz (7 p). b) $L(2, 1, -2, 3) \in \mathbb{R}^2$ vektörünü bulunuz (7 p).

c) $\text{çek}L$ nin bir elemanını bulunuz (6 p).

6) $L: V \rightarrow V$ lineer dönüşümü için $L \circ L = L$ olduğu bilinmektedir. Buna göre L nin özdeğerlerinin 0 ve 1 olduğunu gösteriniz (20 p).

$$2) a) \|u\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}, \|v\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$b) \angle(u, v) = \theta \text{ olsun.}$$

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} = \frac{\langle (1, -2, -3), (2, 3, 1) \rangle}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = \frac{1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + (-3) \cdot 1}{14} = -\frac{1}{14}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \cos \theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$3) a) \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x-1 & 2 & -1 \\ 0 & x-1 & 1 \\ -1 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 0 & x+1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ x-1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)(x^2-1) - (2+x-1) = x^3 - x^2 - x + 1 - x - 1$$

$$= x^3 - x^2 - 2x$$

b) Cayley-Hamilton teoremine göre her matris karakteristik polinomunun bir köküdür. Buna göre $A^3 - A^2 - 2A = 0$ olmalıdır.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 - A^2 - 2A = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-2-2 & -8+4+4 & 4-2-2 \\ -1+1 & 3-1-2 & -2+2 \\ 2-2 & -2+2 & -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

4) a) P matrisinin sütunları, A matrisinin özvektörlerinden oluşur. Bunun için A matrisinin özdeğerlerini ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri bulalım.

$$\det(xI - A) = \begin{vmatrix} x-2 & 0 \\ -5 & x+3 \end{vmatrix} = (x-2)(x+3) = 0 \Rightarrow x=2, x=-3$$

$x=2$ özdeğeri için özvektörleri:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere } AX = 2X$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2x_1 = 2x_1 \\ 5x_1 - 3x_2 = 2x_2 \end{matrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

0 halde, $X = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$ şeklindedir.

$x=-3$ özdeğeri için özvektörleri:

$$AX = -3X \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2x_1 = -3x_1 \\ 5x_1 - 3x_2 = -3x_2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2 = t, t \neq 0, t \in \mathbb{R}$$

0 halde, $X = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$ şeklindedir.

$D = P^{-1}AP$ köşegen matris olacak şekildeki P matrisi:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$$b) D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow A^T = (PDP^{-1})^T = PD^T P^{-1}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{\det P} \text{adj} P = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

veya A'nın özdeğerleri D'nin köşegen elemanları olup $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ şeklindedir.

$$A^T = PD^T P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^T & 0 \\ 0 & -3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

↑
D köşegen olduğundan

$$= \begin{bmatrix} 2^T & 0 \\ 2^T & -3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^T & 0 \\ 2^T + 3^T & -3^T \end{bmatrix}$$

$$5) a) L(x_1, x_2, x_3, x_4) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = (x_1 + x_3, -x_2 - x_4)$$

$$b) L(2, 1, -2, 3) = (2 - 2, -1 - 3) = (0, -4)$$

$$c) (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker L \Leftrightarrow L(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_3, -x_2 - x_4) = (0, 0) \Leftrightarrow x_1 + x_3 = 0, -x_2 - x_4 = 0$$

$x_1 = 1 = -x_3, x_2 = 2 = -x_4$ için yukarıdaki eşitlikler sağlanır ve $(1, 2, -1, -2) \in \ker L$ dir.

6) $v \neq 0_v$ olmak üzere $v \in V$ vektörüne c özdeğeri karşılık gelen özvektör olsun.

$$\Rightarrow L(v) = cv \dots (1)$$

$L \circ L = L$ olduğuna bilindiğine göre $\forall v \in V$ iken

$$(L \circ L)(v) = L(v) \Rightarrow L^2(v) = L(v) \dots (2)$$

olur.

(1) in her iki tarafını L yi uygularsak

$L(L(v)) = L(cv)$ elde ederiz. L lineer dönüşüm.

olup $L(cv) = cL(v)$ olduğundan $L(L(v)) = cL(v)$

bulunur. Bu eşitliğin sol tarafı (2) den $L(v)$ ye

sağ tarafındaki $L(v)$ ise (1) den cv ye eşit

olup $L(v) = c^2v$ elde edilir. Bu son eşitlikte (1)

den $L(v)$ yerine cv yazılırsa $cv = c^2v$ bulunur

$$\Rightarrow cv - c^2v = 0_v \Rightarrow (c - c^2)v = 0_v \Rightarrow v \neq 0_v \text{ olup}$$

$$c - c^2 = 0 \Rightarrow c(1 - c) = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ veya } c = 1$$