Cevap Anahtarı

Cebir II Final Soruları 10.06.2025

1- a) R bir Temel İdeal Bölgesi olsun. Her ikiside sıfır olmayan iki elemanın en büyük ortak böleni vardır, ispatlayınız. (10)

b) R birimli ve değişmeli bir halka, P R'nin kendisinden farklı bir ideali olsun. P asal ideal ise R/P bölüm halkası tamlık bölgesidir, ispatlayınız. (10)

2- R ve S iki halka $f: R \longrightarrow S$ halka homomorfizması olsun. $R/_{\text{Çek} f} \cong f(R)$ olduğunu gösteriniz. (20)

3- a) $9+17i$ Gauss tamsayısını asal çarpanlarına ayırınız. (10)

b) $9-5i$ ve $-9+13i$ Gauss tam sayılarının en büyük ortak bölenini Öklid Algoritması yoluyla bulunuz. (10)

4- $\mathbb{Z}_5[x]$'de $f(x)=4x^4+2x^3+x^2+4x+3$ ve $g(x)=3x^2+2$ polinomlarının en büyük ortak bölenlerini Öklid Algoritması yoluyla bulunuz. $d(x)=\text{obeb}(f(x),g(x))$ ise $d(x)=s(x)f(x)+t(x)g(x)$ şartını sağlayan $s(x),t(x)\in\mathbb{Z}_5[x]$ polinomlarını bulunuz. (20)

5- a) $(\mathbb{Z}_{42},+,\cdot)$ halkasının bütün ideallerini bulunuz. varsa maksimal ideallerini belirleyiniz. (10)

b) R bir Boole halkası (sıfır bölensiz) olsun. I, R'nin sıfırdan farklı ideali asalsa maksimal idealdir, gösteriniz. (10)

Başarılar dilerim

1- a) Defterinizde mevcut

b) "

2- "

3- a) $9+17i=(1+i)(2+i)(6-i)$

b) $-9+13i=(-1+i)(9-5i)+-5-i$

$9-5i=(-2+i)(-5-i)+-2-2i$

$-5-i=(1-i)(-2-2i)+-1-i$ obeb

4 - $f(x) = (3x^2+4x)\,g(x) + x+3$

$g(x) = (3x+1)(x+3) + 4$

$x+3 = (4x+2).4 \quad + 0$

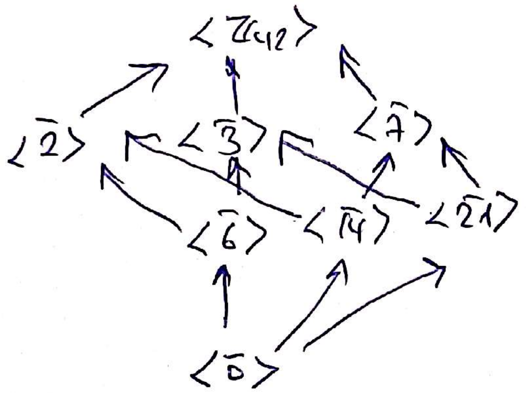
$4 = g(x) - (3x+1)(x+3)$

$= g(x) - (3x+1)\left(f(x) - (3x^2+4x)g(x)\right)$

$= -(3x+1)f(x) + g(x)\left[(3x^2+4x)(3x+1)+1\right]$

5- a) 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42

$\mathbb{Z}_{42}$ halkasının idealleri $\langle \mathbb{Z}_{42} \rangle$, $\langle \bar{2} \rangle$, $\langle \bar{3} \rangle$, $\langle \bar{6} \rangle$, $\langle \bar{7} \rangle$, $\langle \overline{14} \rangle$, $\langle \overline{21} \rangle$ $\langle \bar{0} \rangle$



$\langle \bar{2} \rangle$, $\langle \bar{3} \rangle$, $\langle \bar{7} \rangle$ maksimal idealler

b-) $I \neq 0$ asal ideal olsun

$I \subset J$ olacak şekilde J idealini alalım.

$\exists a \in J \setminus I$ için $a \notin I$

$a(1-a) = a - a^2 = 0 \in I$ ve $a \notin I$ ve I asal olduğundan

$1-a \in I \subset J$, $a \in J$ $\quad 1-a+a = 1 \in J \Rightarrow J = R$ olup

I maksimal idealdir.