

13.01.2026

Cebir I Final Soruları

1- G ve H iki grup $f: G \rightarrow H$ bir grup epimorfizması olsun. $\ker f = N$ ise $G/N \cong H$ olduğunu gösteriniz.

2- a) G bir grup, $a \in G$ ve $H \leq G$ olsun $|aH| = |H|$ olduğunu gösteriniz.

b) G bir grup, $N \triangleleft G$ olsun. $a, a_1, b, b_1 \in G$ için $aN = a_1N$, $bN = b_1N$ ise $(ab)N = (a_1b_1)N$ olduğunu gösteriniz.

3- a) $\mathbb{Z}_{10}^*$ grubunu belirleyiniz, bütün elemanların mertebelerini bulunuz ve grup devirli midir?

b) $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}$ ve $N = \langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle$ olsun.

$$|G/N| = ?$$

4- a) $(H, \cdot)$ değişmeli bir grup ve $K = \{k \in H \mid \forall x \in H, kx = xk\}$ olsun. K , H 'nin alt grubu mudur? Araştırınız.

b) $\mathbb{Z}_{12}$ grubunun öyle H_1, H_2 gibi iki alt grubunu bulunuz ki $\mathbb{Z}_{12} = H_1 \oplus H_2$ olsun. ($H_1, H_2 \neq \{0\}$ olacak)

5- a) $G = (\mathbb{R}, +)$ ve $H = GL(2, \mathbb{R})$ (2×2 tipinde $\mathbb{R}$ den katsayılı matrislerin grupsal grubu) olsun.

$$\varphi: G \rightarrow H$$

$$x \rightarrow \varphi(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ fonksiyonunun grup}$$

homomorfizması olduğunu gösterip, çekirdeğini bulunuz.

b) $G = GL(2, \mathbb{R})$ ve $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R}, a, d \neq 0 \right\}$ olsun. $H \triangleleft G$ midir? araştırınız.

Cebir I Cevap Anahtarı

1- Defterinizde var

2-a) "

b) "

3- a) $\mathbb{Z}_{10}^* = \{1, 3, 7, 9\}$ $\phi(1)=1$ $\phi(3)=4$ $\phi(7)=4$ $\phi(9)=2$
olup $|\mathbb{Z}_{10}^*| = \phi(3) = \phi(7) = 4$ olup devrirdir.

b) $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}$ $H = \langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle = \{(\bar{2}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{2}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{0})\}$

$$|\mathbb{G}/H| = \frac{|G|}{|H|} = \frac{48}{4} = 12$$

4- a) $K = \{k \in H \mid \forall x \in H, k^{-1}x = kx\}$

$e \in H$ için $e^{-1}x = ex$ olup $e \in K \Rightarrow K \neq \emptyset$

$\forall k_1, k_2 \in K$ olsun ($k_1^{-1}x = k_1x$, $k_2^{-1}x = k_2x$)

$$(k_1 k_2)^{-1}x = (k_2 k_1^{-1})x = (k_2^{-1} k_1)x = k_2^{-1}(k_1x) = k_2^{-1}(k_1 k_2^{-1}x) = (k_1 k_2)^{-1}x$$

$K \leq H$ bulunur.

b) $H_1 = \langle \bar{3} \rangle$, $H_2 = \langle \bar{4} \rangle$ alınırsa

$$H_1 = \{\bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{0}\} \quad H_2 = \{\bar{4}, \bar{8}, \bar{0}\}$$

$$\mathbb{Z}_{12} = H_1 + H_2 \text{ ve}$$

$H_1 \cap H_2 = \{\bar{0}\}$ olup $\mathbb{Z}_{12} = H_1 \oplus H_2$ bulunur.

5- a) $\varphi: G \rightarrow H$

$$x \rightarrow \varphi(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \forall x, y \in G \text{ için}$$

$$\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \varphi(x+y) \text{ olup}$$

$$\text{homomorfizmardır. } \ker \varphi = \{x \in G \mid \varphi(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$$

$x=0 \Rightarrow \ker \varphi = \{0\}$ bulunur.

b) $H \neq \emptyset$ aşıkdr, $H \leq G$ mi? $\forall \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \in H$

$$\text{icin } \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{a_2 d_2} \begin{bmatrix} d_2 & 0 \\ b_2 a_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{a_2 d_2} \begin{bmatrix} a_1 d_2 + b_1 b_2 & b_1 a_2 \\ d_1 b_2 & d_1 a_2 \end{bmatrix}$$

olup H nin elemanı değil o halde $H \nsubseteq G$ dir.

ya da $h = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ alır ($g \in G$)

$$g h g^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \notin H \text{ olup } H \nsubseteq G \text{ bulunur.}$$