

Cebir I Vize Soruları

- 1- $G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0\}$ kümesi üzerinde $*$ işlevi $\forall (a, b), (c, d) \in G$ için $(a, b) * (c, d) = (a+bc, bd)$ şeklinde tanımlanıyor. $(G, *)$ ikilisi bir gruptur.
 - a) Mertebesi 2 olan eleman var mıdır? Varsa bulunuz.
 - b) Mertebesi 3 olan eleman var mıdır? Varsa bulunuz.
- 2- a) $\mathbb{Z}_{15}^*$ grubu ve $A = \{\bar{x} \in \mathbb{Z}_{15}^* \mid x \equiv 1 \pmod{5}\}$ alt kümesi veriliyor. $A \leq \mathbb{Z}_{15}^*$ mıdır?
 - b) G qdrpımsal bir grup, $x, y \in G$ olsun. $(xyx^{-1})^4$ elemanını en sade biçimde yazınız. Bundan faydalanarak $(xyx^{-1})^{100}$ elemanını hesaplayınız.
- 3- S_7 de $\sigma = (1234)(567)(261)(47)$ ve $\rho = (12345)(67)(1357)(16)$ permutasyonları veriliyor
 - a) $o(\sigma) = ?$ $o(\rho) = ?$
 - b) $\sigma \rho \sigma^{-1}$ i bulup mertebesini hesaplayınız.
- 4- $G = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15}^*$ grubunda mertebesi 6 olan elemanları bulunuz.
- 5- a) G bir grup, $x \in G$ ve $o(x) = k$ olsun. $\forall r \in \mathbb{Z}^+$ için $o(x^r) = \frac{k}{\gcd(r, k)}$ olduğunu gösteriniz.
 - b) G n. mertebeden devirli bir grup olsun $G = \langle a \rangle = \langle a^s \rangle$ ise $(s, n) = 1$ olduğunu ispatlayınız.
- 1- Önce grubun birimini bulalım

$$(a, b) * (x, y) = (a, b) \quad (a+bx, by) = (a, b) \quad \begin{matrix} a = a+bx & by = b \\ x = 0 & y = 1 \end{matrix}$$

$$e = (0, 1)$$
 - a) $o((a, b)) = 2$ olan el. varmı

$$(a, b) * (a, b) = (a+ba, b^2) = (0, 1) \quad \begin{matrix} a+ba = 0, & b^2 = 1, & b \neq 1 \\ a = 0 \end{matrix}$$

$$o((a, -1)) = 2 \text{ bulunur.}$$
 - b) $o((a, b)) = 3$ olan varmı $(a, b) * (a, b) = (a+ba, b^2)$

$$(a, b) * (a+ba, b^2) = (a+ba+b^2a, b^3) = (0, 1) \quad \begin{matrix} b = 1 \\ a = 0 \end{matrix}$$
 olup $o((a, b)) = 3$ olan eleman yoktur.

2- a) $\mathbb{Z}_{15}^* = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$ $A = \{1, 11\}$ olup

$\cdot$	1	11
1	1	11
11	11	1

A grupsal kapalı o halde $A \leq \mathbb{Z}_{15}^*$ (kriter teo.3)

b) Önce $(xy^{-1})^4 = (xy^{-1})^2 (xy^{-1})^2 = (xy^{-1})(xy^{-1})(xy^{-1})(xy^{-1})$
 $= (xy^2)^{-1} (xy^2)^{-1} = xy^{-1}$

bulunur. $(xy^{-1})^{100} = xy^{100} = xy^{-1}$ elde edilir.

3- $\sigma = (1234)(567)(261)(47) = (1345627)$

$\rho = (12345)(67)(1357)(16) = (1723)(456)$

a) $o(\sigma) = 7$ $o(\rho) = \text{ekok}(4,3) = 12$

b) $\sigma \rho \sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3))(\sigma(4)\sigma(5)\sigma(6)) = (3174)(562)$

$o(\sigma \rho \sigma^{-1}) = \text{ekok}(4,3) = 12$ bulunur.

4- $G = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15}^*$

$\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$o(\bar{0}) = 1$

$o(\bar{1}) = 6$

$o(\bar{2}) = 3$

$o(\bar{3}) = 2$

$o(\bar{4}) = 3$

$o(\bar{5}) = 6$

$\mathbb{Z}_{15}^* = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$

$o(1) = 1$

$o(2) = 4$

~~$o(4) = 2$~~ $o(4) = 2$

$o(7) = 4$

$o(8) = 4$

$o(11) = 2$

$o(13) = 4$

$o(14) = 2$

$o((\bar{a}, \bar{b})) = \text{ekok}(o(\bar{a}), o(\bar{b}))$

$= 6$

~~1 6~~ olmaz

~~6 1~~

~~2 3~~ olmaz

3 2

~~6 3~~ olmaz

~~3 6~~ olmaz

6 2

~~2 6~~ olmaz

$(\bar{1}, \bar{1}), (\bar{5}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{11}), (\bar{2}, \bar{14}), (\bar{4}, \bar{4}), (\bar{4}, \bar{11}), (\bar{4}, \bar{14})$

$(\bar{1}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{11}), (\bar{1}, \bar{14}), (\bar{5}, \bar{4}), (\bar{5}, \bar{11}), (\bar{5}, \bar{14})$

5- a) Defterinizde var

b) Defterinizde var