

Cebir I Dersi Bütünleme Soruları

1- a) $f: G \rightarrow H$ grup homomorfizması olsun.

$\ker f = \{e_G\}$ ise f birebirdir, ispatlayınız.

b) G bir grup $a \in G$ ve $\forall x \in G$ için $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ ile tanımlı $\varphi_a: G \rightarrow G$ fonksiyonu grup otomorfizmasıdır, ispatlayınız.

2- a) $f: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizması olsun

$K \trianglelefteq H$ ise $f^{-1}(K) \trianglelefteq G$ 'dir, ispatlayınız.

b) G değişmeli bir grup, $H_1, \dots, H_n$ 'ler G 'nin altgrupları olsun. $H = H_1 + \dots + H_n$ toplam grubu G 'nin alt grubudur, ispatlayınız.

3- a) $G = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z}_4, b \in \mathbb{R} - \{0\}\}$ cümlesi üzerinde $(a, b) * (c, d) = (a+c-1, 3bd)$ ile $*$ işlemi tanımlanıyor. $(G, *)$ ikilisi değişmeli bir gruptur. Birimini ve (a, b) elemanının tersini bulunuz.

b) G darpimsal bir grup ve $a, b \in G$ olsun $b^{-1}(ab^2)^3b^{-1}a^2$ elemanını en basit şekilde yazınız.

4- a) S_4 grubunda $\alpha = (14)(23)$ elemanı için $m(\alpha)$ yı bulunuz.

b) S_{11} de $\alpha = (3146782)(594)(7381)$ permutasyonunun mertebesi ve bulduğunuz permutasyonu ikili devirlerin darpimi şeklinde yazınız.

5- a) $\mathbb{Z}_{10}^*$ grubunun izomorf olduğu permutasyon grubunu bulup, bu grubun işlem tablosunu yapınız.

b) $\mathbb{Z}_{20}^*$ grubu ve $H = \{1, 19\}$ alt kümesi veriliyor. $H \trianglelefteq \mathbb{Z}_{20}^*$ olduğunu gösterip $\mathbb{Z}_{20}^*/H$ bölüm grubunu elemanlarıyla belirleyiniz.

1- a) Defterinizde var

b) " "

2- a) " "

b) " "

3- a) değişmeli grup olduğundan tek taraflı göstermek yeterlidir.

$$(a, b) * (x, y) = (a + x - 1, 3by) = (a, b)$$

$$x = 1, y = 1/3 \text{ olup } e = (1, 1/3) \text{ bulunur}$$

$$(a, b)^{-1} = (2 - a, \frac{1}{9b}) \text{ bulunur.}$$

$$b^3 a^{-1} (a b^{-2})^3 \cdot b^2 a^{-1} \cdot b^2 = b^3 a^{-1} (a b^{-2}) (a b^{-2}) (a b^{-2}) b^2 a^{-1} b^2$$

$$= b^3 b^2 a = b^5 a = ba \text{ bulunur.}$$

$$4- a) x \in M(\alpha) \Rightarrow x \alpha x^{-1} = (x(1)x(4))(x(2)x(3)) = (14)(23)$$

$$M(\alpha) = \{I, (14), (32), (41)(32), (23)(14), (32)(41), (23)(41), (32)(41)\}$$

$$b) d = (1845967)(23) \text{ olup}$$

$$o(d) = \text{oket}(7, 2) = 14$$

$$d = (17)(16)(15), (15)(14)(18)(23) \text{ bulunur.}$$

$$5- a) \mathbb{Z}_{10}^* = \{1, 3, 7, 9\} \quad f_a(n) = a^n \text{ den}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad f_7 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \\ 7 & 1 & 9 & 3 \end{pmatrix} \quad f_9 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \\ 9 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

	f_1	f_3	f_7	f_9
f_1	f_1	f_3	f_7	f_9
f_3	f_3	f_9	f_1	f_7
f_7	f_7	f_1	f_9	f_3
f_9	f_9	f_7	f_3	f_1

$$b) \mathbb{Z}_{20}^* = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$$

	1	19
1	1	19
19	19	1

Sonlu çarpımsal küpeli
 $H \leq \mathbb{Z}_{20}^*$ değişmeli dd. den
 $H \trianglelefteq \mathbb{Z}_{20}^*$ dir.

$$\mathbb{Z}_{20}^* / H = \{H, 3H, 7H, 9H\} \text{ bulunur}$$