

Cevap Anahtarı  
Cebir II Final Soruları

05.06.2026

- 1- Bir  $D$  tamlik bölgesinin kesir cismi olan  $F$  üzerinde  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in F$  için  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{b \cdot d}$ ,  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$  işlemlerinin iyi tanımlı olduklarını ispatlayınız.
- 2- a)  $R$  halkası sıfır bölensiz ise  $R[x]$  halkasında sıfır bölensiz olduğunu ispatlayınız.  
b)  $R$  ve  $S$  iki halka  $f: R \rightarrow S$  halka homomorfizması olsun.  $\forall a \in R$  için  $f(-a) = -f(a)$  dir, ispatlayınız.
- 3- a)  $f(x) = 2x^4 + 13x^3 + 17x^2 - 12x - 8$  polinomunun  $\mathbb{Z}[x]$ 'de asal olup olmadığını araştırınız.  
b)  $f(x) = x^5 - x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$  polinomu için  $\mathbb{Z}_2[x]/(f(x))$  Bölüm halkası tamlik bölgesi midir?
- 4- a)  $12+i$  ve  $3+8i$  Gauss tam sayılarının en büyük ortak bölenini bulunuz.  
b)  $-3+80i$  Gauss tam sayısını asal çarpanlarına ayırınız.
- 5- a)  $\mathbb{Z}_{165}$  halkasının bütün ideallerini bulunuz.  
Varsa maksimal ideallerini belirleyiniz.  
b)  $f(x) = 3x^5 + 5x^4 + 6x^3 + x^2 + 5x + 6$  ve  $g(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$   $\mathbb{Z}_7[x]$ 'de verilen polinomlar olsun. En büyük ortak bölenini bulunuz.

Başarılar dilerim

1- Defterinizde var

2-a)

"

b)

"

3- a)  $f(x-1)$ 'e bakalım  $f(x-1) = 2(x-1)^4 + 13(x-1)^3 + 17(x-1)^2 - 12(x-1) + 8$   
 $f(x-1) = 2x^4 + 5x^3 - 10x^2 - 15x + 10$  olup  $\pi = 5$  alınırsa Eisenstein kriterine göre  $f(x-1)$  asal dolayısıyla  $f(x)$  de asaldır.

b)  $f(x) = x^5 - x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$  polinomu. asal mıdır diye ona bakalım.  $f(0) \neq 0$   $f(1) \neq 0$  olup linear çarpan içermez 2 yada 3. dereceden çarpanı var mı bakalım  $x^2 + mx + 1$  polinomu  $\mathbb{Z}_2[x]$ 'de asal  $f(x)$ 'de böleni değildir. O halde  $(f(x))$  idealisi asal  $\mathbb{Z}_2[x]/(f(x))$  T.B. dir.

$$4 - a) 12+i = (1-i)(3+8i) + 1+4i$$

$$3+8i = (-2+i)(1-4i) + 1-i$$

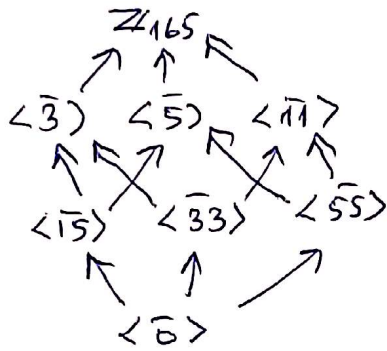
$$1-4i = (2-i)(1+i) - \textcircled{i} \text{ aralarında aseldir.}$$

$$b) -3+80i = (2+3i)(4+i)(5+2i)$$

5 - a)  $\mathbb{Z}_{165}$  halkasının idealleri

$$\langle \mathbb{Z}_{165} \rangle, \langle \bar{3} \rangle, \langle \bar{5} \rangle, \langle \bar{15} \rangle, \langle \bar{11} \rangle, \langle \bar{33} \rangle, \langle \bar{55} \rangle, \langle \bar{0} \rangle$$

maksimal idealleri  $\langle \bar{3} \rangle, \langle \bar{5} \rangle, \langle \bar{11} \rangle$



$$b -) \begin{aligned} 3x^5 + 5x^4 + 6x^3 + x^2 + 5x + 6 &= (5x^2 + 5)(2x^3 + x^2 + 2x + 1) + 5x^2 + 2x + 1 \\ 2x^3 + x^2 + 2x + 1 &= (6x + 2)(5x^2 + 2x + 1) + -x - 1 \\ 5x^2 + 2x + 1 &= (2x + 3)(6x + 6) + \textcircled{4} \\ 6x + 6 &= 5x \cdot 4 + \underline{6} \quad (-x - 1 = 6x + 6) \end{aligned}$$