

Adı Soyadı:  
Numarası:

03.05.2024

## 2023-2024 CEBİR İIDERSİ ARA SINAV SORULARI

- 1) a)  $R$  birimli bir halka olsun.  $u, v$  birimsel ise  $uv$  de birimseldir, ispatlayınız.  
b)  $\mathbb{Z}$  Tam sayılar halkasının her ideali temel idealdir, ispatlayınız.
- 2) a)  $R$  bir Tamlık bölgesi olsun.  $R[x]$  polinomlar halkasının sıfır bölensiz olduğunu ispatlayınız.  
b)  $R$  ve  $S$  iki halka  $f: R \rightarrow S$  halka homomorfizması için  $I, S$ 'nin bir ideali ise  $f^{-1}(I)$  da  $R$ 'nin bir idealidir, ispatlayınız.
- 3)  $\mathbb{Z}$  Tam sayılar halkası olmak üzere  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  halkası ile  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$  halkası izomorf olur mu? Araştırınız.
- 4) a)  $(\mathbb{Z}_{15}, \oplus, \odot)$  halkasının birimsel, idempotent ve nilpotent elemanlarını bulunuz.  
b)  $I$  ve  $J$ , değişmeli bir  $R$  halkasının iki ideali olsun.  
$$K = \{r \in R: rs \in I \text{ (Her } s \in J \text{ için)}\}$$
kümesi  $R$ 'nin bir ideali olur mu? Araştırınız.
- 5) a)  $R$  bir halka  $I, R$ 'nin ideali olsun. Her  $x, y \in R$  için  $R/I$  bölüm halkası değişmeli ise her  $x, y \in R$  için  $xy - yx \in I$  olduğunu gösteriniz.  
b)  $f: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$   
$$\bar{a} \rightarrow f(\bar{a}) = 4\bar{a}$$
ile tanımlı  $f$  fonksiyonunun halka homomorfizması olduğunu gösteriniz.  $\text{Çek}f$  ve  $\text{Gör}f$  i bulunuz.

*Başarılar*  
**Prof. Dr.Şenol EREN**

## Cebir II Vize Cevap Anahtarı

- 1- a) Defterinizde mevcut  
b) " "

- 2- a) " "  
b) " "

$$3- \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$
$$\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{c + d\sqrt{3} \mid c, d \in \mathbb{Z}\}$$

$f: \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$  izomorfizma olsun.  
o halde  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  dir.

$$2 = \sqrt{2}^2 \Rightarrow f(2) = f(\sqrt{2}^2) = (f(\sqrt{2}))^2 = 2 = (a + b\sqrt{3})^2$$

$$2 = a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{3} \text{ olup } \sqrt{3} = \frac{2 - a^2 - 3b^2}{2ab} \text{ den}$$

bu mümkün değil o halde  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cong \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$   
olmaz.

$$4- a) U_{\mathbb{Z}_5} = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$$

$$\text{idempotent elementler} = \{0, 1, 6, 10\}$$

$$\text{nilpotent elementler} = \{0\}$$

$$b) K = \{r \in R \mid rs \in I, (\forall s \in S \text{ için})\}$$

$$1) 0_R \in R \text{ için } \forall s \in S \Rightarrow 0_R \cdot s = 0_R \in I \Rightarrow K \neq \emptyset$$

$$2) \forall r_1, r_2 \in K \Rightarrow \forall s \in S \text{ için } r_1 s, r_2 s \in I$$

$$(r_1 - r_2)s = r_1 s - r_2 s \in I \text{ olup } r_1 - r_2 \in K \text{ dir.}$$

$$3) \forall r \in K \text{ ve } \forall p \in R \text{ için } \forall s \in S, rs \in I$$

$$(pr)s = p(rs) \in I \text{ olup } pr \in K, \text{ deg. olduğundan}$$

$rp \in K$  o halde  $K$ ,  $R$ 'nin idealidir.

5- a)  $\forall x+I, y+I \in \mathbb{R}/I$  için

$$(x+I)(y+I) = xy+I = yx+I = 1 \text{ up } xy-yx \in I$$

bulunur.

b)  $f: \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$   
 $\bar{a} \longrightarrow f(\bar{a}) = 4\bar{a}$

$\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_{12}$  için

$$f(\bar{a} + \bar{b}) = f(\overline{a+b}) = 4(\overline{a+b}) = 4\bar{a} + 4\bar{b} \\ = f(\bar{a}) + f(\bar{b})$$

$$f(\bar{a} \cdot \bar{b}) = f(\overline{a \cdot b}) = 4(\overline{a \cdot b}) = 16(\overline{a \cdot b}) = 4\bar{a} \cdot 4\bar{b} \\ = f(\bar{a}) \cdot f(\bar{b})$$

$$\text{Gek} f = \{ \bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9} \}$$

$$\text{Gör} f = \{ \bar{0}, \bar{4}, \bar{8} \}$$