Cevap Anahtarı

Cebir II Vize Soruları 12.04.2026

1- a) Boole Halkasını tarif ediniz ve bu halkanın değişmeli olduğunu ispatlayınız.

b) $R \neq \{0_R\}$ regüler halka olsun. $\forall x \in R$ için $x = xyx$ olacak şekilde bir tek $y \in R$ olsun. Bu taktirde halka sıfır bölensizdir, ispatlayınız.

2- a) R bir halka A ve B R'nin iki ideali olsun $A+B$'de R'nin idealidir, ispatlayınız.

b) R ve S iki halka, $f: R \longrightarrow S$ halka homomorfizması olsun. J' S'nin ideali ise $f^{-1}(J)$'de R'nin idealidir, ispatlayınız.

3- a) $f: \mathbb{Z}_8 \longrightarrow \mathbb{Z}_{10}$
$[a] \longrightarrow f([a]) = 5[a]$ ile f dönüşümü veriliyor.

i) Halka homomorfizması olduğunu gösteriniz.

ii) $Çek(f)$ ve $f(\mathbb{Z}_8)$ kümelerini bulunuz.

b) $\mathbb{Z}_{18}$ halkasının idempotent, nilpotent ve terslenebilen elemanlarını bulunuz.

4- a) $R = 4\mathbb{Z}$ halkası ve R'nin $I = 3\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z}$ ideali veriliyor. R/I bölüm halkasının elemanlarını belirleyiniz.

b) $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbb{Z} \right\}$ kümesi matrislerde toplama ve çarpma işlemleriyle tanımlanan bir halkadır. $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a \in \mathbb{Z} \right\}$ kümesi R'nin bir ideali midir?

5- a) $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ ve $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$ halkaları izomorf mudur?

b) R değişmeli bir halka olsun. R deki idempotent elemanlar çarpımsal kapalıdır gösteriniz.

1- a) Defterinizde var
b) " "
2- a) " "
b) "

3- a) Önce iyi tanımlı olduğunu gösterelim
$\bar{a} = \bar{b} \Rightarrow 8 | a-b \Rightarrow a = 8k + b \Rightarrow 5a = 40k + 5b$
$5\bar{a} = 5\bar{b}$ olup iyi tanımlıdır.

i) $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_8$ için $f(\bar{a}+\bar{b}) = f(\overline{a+b}) = 5[a+b] = 5[a]+5[b]$
$= f(\bar{a})+f(\bar{b})$

$f(\bar{a}\cdot\bar{b}) = f(\overline{a.b}) = 5[a.b] = 25[a.b] = 5[a].5[b] = f(\bar{a})f(\bar{b})$

ii) $Çek(f) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ $\quad f(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{5}\}$

3-b) nilpotent elemanlar $= \{\bar{0}, \bar{6}, \overline{12}\}$ idempotent el $= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{9}, \overline{10}\}$

terslenebilen elemanlar $= \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}\}$

4- a) $I = 3\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z} = \langle okek(3,4) \rangle \mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$

$R/I = \{12\mathbb{Z}, 4+12\mathbb{Z}, 8+12\mathbb{Z}\}$

b) $M \neq \emptyset$ açık $\forall \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$ için

$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$

ii) $\forall \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in R$ ve $\forall \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$ için

$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$ sol ideal

$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa & xb \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin M$ sağ ideal değil

M ideal değil

5- a) $\mathbb{Z}[\sqrt{7}] \cong \mathbb{Z}[\sqrt{11}]$ olsa $f(1)=1$, $f(0)=0$ dır.

$7 = \sqrt{7}^2 \Rightarrow f(7) = f(\sqrt{7}^2) = f(\sqrt{7})^2$ den

$7 = (a+b\sqrt{11})^2 = a^2 + b^2 11 + 2ab\sqrt{11}$ olup

$\dfrac{7-a^2-b^2 11}{2ab} = \sqrt{11}$ olup mümkün değildir. izomorf

olmaz.

b) idempotent elemanlar x ve y keyfi olsun

$x^2 = x \wedge y^2 = y$ olup $(x.y)^2 = (xy)(xy) = x^2.y^2 = xy$

olup çarpımsal kapalıdır.