Cebir II Bütünleme Soruları 19.07.2024

1. a) R birimli ve değişmeli bir halka P, R'nin kendisinden farklı bir ideali olsun. P maksimal ideal ise R/P bölüm halkası cisimdir, ispatlayınız.

b) $a+bi \in \mathbb{Z}[i]$ olsun. $d(a+bi) \in \mathbb{Z}$'de asalsa $a+bi$'de $\mathbb{Z}[i]$'de asaldır, ispatlayınız.

2- a) $f(x)=x^5+x^4+x^2+x+2 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomu asal mıdır?

b) I ve J bir R halkasının iki ideali ve $I \cap J=\{0\}$ ise $\forall a \in I$, $\forall b \in J$ için $a.b=0$ dır, gösteriniz.

3- a) $f(x)=x^2+x+\bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinomu için $\mathbb{Z}_2[x]/(f(x))$ Bölüm halkasının elemanlarını bulunuz.

b) F, 27 elemanlı bir cisim olsun. $\forall a \in F$ için $2a=-a$ olduğunu gösteriniz.

4- a) $-8+3i$ ve $2+9i$ Gauss tam sayılarının en büyük ortak bölenini bulunuz.

b) $-31+12i$ Gauss tam sayısını çarpanlarına ayırınız.

5- a) R değişmeli bir halka A ve B R'nin iki ideali olsun. $I=\{r \in R \mid rb \in A \ (\forall b \in B \text{ için})\}$ kümesi R'nin ideali midir?

b) $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}_{12}$ halkaları veriliyor. $\mathbb{Z}$'den $\mathbb{Z}_{12}$'ye örten homomorfizma tanımlayıp çekirdeğini bulunuz ve $\mathbb{Z}$'nin çekirdeği kapsayan idealleriyle $\mathbb{Z}_{12}$ halkasının idealleri arasında birebir bir eşleme kurunuz.

(Sorular eşit puanlıdır)

Cevap Anahtarı

1- a) Defterinizde mevcut
b) " "

2- a) $f(x)=x^5+x^4+x^2+x+2$ önce lineer çarpanı var mı
$f(1)\neq 0, f(-1)\neq 0, f(2)\neq 0, f(-2)\neq 0$ l. çarpan içermez.
$\mathbb{Z}_2[x]$'de bakalım. $\bar{f}(x)=x^5+x^4+x^2+x=x(x+\bar{1})(x^3+\bar{1})$
$=x(x+\bar{1})^2(x^2+x+\bar{1})$

$x^2+x+\bar{1}$ pol. $\mathbb{Z}_2[x]$ asaldır.
$f(x)=(x^2+x+1)(x^3-x+2)$ olup asal değildir.

b) $\forall a\in I$ ve $\forall b\in J$ için $ab\in I$ ve $a.b\in J$ olup
$a.b\in I\cap J \Rightarrow a.b=0$ bulunur.

3- a) Tam temsilciler sistemi $\{\bar{a}+\bar{b}x \mid a,b\in\mathbb{Z}_2\}$
olup $\{\bar{0},\bar{1},\bar{x},\bar{1}+x\}$ olur
$\mathbb{Z}_2[x]/_{(f)}=\{(f),\bar{1}+(f),x+(f),\bar{1}+x+(f)\}$

b) $\operatorname{Kar} F\mid 27$ olup $\operatorname{Kar} F=1,3,9,27$ dir.
F cisim old. dan $\operatorname{Kar} F=$ asal olmalı, $\operatorname{Kar} F=3$
$\forall a\in F$ için $3a=0 \Rightarrow 2a=-a$ bulunur.

4- a) $\dfrac{2+9i}{-8+3i}=\dfrac{11}{73}-\dfrac{78}{73}i$; $\cancel{\gamma_1}=-i$ $\delta_1=i-1$

$\dfrac{-8+3i}{-1+i}=\dfrac{11}{2}+\dfrac{5}{2}i$ $\gamma_2=5+2i$ $\delta_2=-1$

olup $\operatorname{obeb}(2+9i,-8+3i)=1$ olup
aralarında asaldırlar

b) $-31+12i=(2+i)(2+3i)(1+4i)$

5- a) $0.b = 0 \in A$ olup $I \neq \emptyset$

$\forall r_1, r_2 \in I$ için $r_1 b, r_2 b \in A$, $\forall b \in B$

$(r_1 - r_2) b = r_1 b - r_2 b \in A$ old. dan $r_1 - r_2 \in I$ bulunur.

$\forall s \in R$, $\forall r \in I$ için $rb \in A$, $\forall b \in B$

$s(rb) = (sr) b \in A$ olup $sr \in I$ bulunur.

Değişmeli old. dan $rs \in I$ olup I idealdir.

b) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$

$a \longrightarrow f(a) = \bar{a}$ örten bir homomorfizmadır.

$\text{Çek} f = 12\mathbb{Z}$ dir.

$12\mathbb{Z}, 6\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$ nin çekirdeği kapsayan idealleridir. Karşılık gelen sırasıyla

$\langle \bar{0} \rangle, \langle \bar{6} \rangle, \langle \bar{4} \rangle, \langle \bar{3} \rangle, \langle \bar{2} \rangle, \mathbb{Z}_{12}$ dir.