

Cebir II Bütünleme Sınavı Soruları

1- a) R ve S iki halka $f: R \rightarrow S$ örten halka homomorfizması olsun. R birimli ve $a \in R$ terslenebilir ise $f(a) \in S$ 'de terslenebilir olduğunu ispatlayınız.

b) R bir Öklid bölgesi ise Temel İdeal Bölgesi'dir, ispatlayınız.

2- a) R birimli ve değişmeli bir halka, P, R 'nin kendinden farklı ideali olsun. R/P bölüm halkası tamlik bölgesi ise P ideali asaldır, ispatlayınız.

b) Temel İdeal Bölgesinde sıfırdan farklı iki elemanın en büyük ortak böleninin olduğunu ispatlayınız.

3- a) $-11+3i$ ve $5+7i$ Gauss tam sayılarının en büyük ortak bölenini bulunuz.

b) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 12x + 12 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomu asal mıdır?

4- ~~\mathbb{Z}_{11}~~ $\mathbb{Z}_{11}[x]$ 'de $f(x) = 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 1$ ve

$g(x) = 3x^3 + 8x^2 + 2x + 9$ polinomları veriliyor.

en büyük ortak bölenini bulunuz. $\text{obeb}(f(x), g(x)) = d(x)$

ise $d(x) = s(x)f(x) + r(x)g(x)$ yapan $s(x), r(x) \in \mathbb{Z}_{11}[x]$ polinomlarını bulunuz.

5- a) R bir halka $a \in R$ idempotent eleman ise $(1-a)ba$ elemanı nilpotent elemandır, gösteriniz. (R halkası birimli bir halka)

b) \mathbb{Z}_{18} halkasının sıfır bölen elemanları, terslenebilen elemanları, idempotent elemanları ve nilpotent elemanlarını belirleyiniz.

Basarılar Dilerim

1- a) Defterinizde var

b) " "

2- a) " "

b) " "

$$3- a) -11+3i = i(5+7i) - 4 - 2i$$

$$5+7i = (-2-i)(-4-2i) + 1+i$$

$$-4-2i = (-1-3i)(1-i) + 0$$

obeb = $1-i$

b) $f(x+1) = 2x^4 + 5x^3 - 10x^2 - 15x + 10$ $p=5$ alınır sd Eisenstein kriteri gereği $f(x+1)$ asal dolayısıyla $f(x)$ asaldır.

$$4- f(x) = (5x+2)g(x) + 8x^2 + 9x + 5$$

$$g(x) = (10x+9)(8x^2 + 9x + 5) + 3x + 8$$

$$8x^2 + 9x + 5 = (10x+2)(3x+8) + 0$$

obeb = $3x+8$

$$3x+8 = g(x) + (x+2)(8x^2 + 9x + 5)$$

$$= g(x) + (x+2) [f(x) + (6x+9)g(x)]$$

$$= (x+2)f(x) + (6x^2 + 10x + 8)g(x)$$

5- a) $a \in R$ idempotent ise $a^2 = a$ dir.

$$(1-a)ba \cdot (1-a)ba = (ba - aba)(ba - aba)$$

$$= baba - ba^2ba - ababa + a ba^2 ba$$

$$= baba - baba - ababa + ababa = 0$$

b) Sıfır bölgenler = $\{ \bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{16} \}$

terslenebilenler = $\{ \bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{11}, \bar{13}, \bar{17} \}$

idempotentler = $\{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{9}, \bar{10} \}$

nilpotentler = $\{ \bar{0}, \bar{6}, \bar{12} \}$