Cevap Anahtarı

28.06.2025

Cebir II Bütünleme Sınavı Soruları

1- a) R birimli ve değişmeli bir halka, P, R'nin kendinden farklı ideali olsun. R/P bölüm halkası Tamlık Bölgesi ise P asaldır, ispatlayınız. (10)

b) $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$, $d^\circ f = n$, $a_0 \neq 0$ olsun u, v aralarında asal iki tam sayı olmak üzere $\frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$ $f(x)$'in bir kökü ise $u|a_0$, $v|a_n$ olduğunu ispatlayınız. (10)

2- a) R bir Öklid Bölgesi ise Temel ideal bölgesidir, ispatlayınız. (10)

b) R ve S iki halka $f: R \longrightarrow S$ halka homomorfizması olsun. K, S'nin bir ideali ise $f^{-1}(K)$'da R'nin bir idealidir, ispatlayınız. (10)

3- a) $7+11i$ Gauss tam sayısını asal çarpanlarına ayırınız. (10)

b) $7+11i$ ve $-7-3i$ Gauss tam sayılarının en büyük ortak bölenini öklid algoritması yoluyla bulunuz. (10)

4- a) $x^5 - 5x^4 - 25x^3 - 40x^2 - 15x + 11 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomu asal mıdır? (10)

b) R birimli, değişmeli, sıfır bölensiz ve $\forall a \in R$ için $a^2 = a$ şartını sağlayan bir halka olsun I, R'nin $(0 \neq I)$ asal ideali ise I maksimal idealdir, gösteriniz. (10)

5- a) $(\mathbb{Z}_{84}, +, \cdot)$ halkasının bütün ideallerini bulunuz, varsa maksimal ideallerini belirleyiniz. (10)

b) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ halkasında $3 \mid (2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$ olduğunu fakat $3 \nmid 2-\sqrt{-5}$ olduğunu gösteriniz. (10)

Başarılar dilerim

1- a) Defterinizde var

b) " "

2- a) " "

b) " "

3- a) $7+11i=(1+i)(2+i)(4-i)$

b) $\frac{7+11i}{-7-3i} = -\frac{41}{29} - \frac{28i}{29}$ $\quad \delta_1 = 3+i$ $\quad 7+11i=(-1-i)(-7-3i)+3+i$

$\frac{-7-3i}{3+i} = \frac{-24}{10} + \frac{2i}{10}$ $\quad -7-3i=(-2)(3+i)+-1-i$

$3+i=(-2+i)(-1+i)+0$

obeb$(7+11i,-7-3i)=-1-i$

4- a) $f(x)=x^5-5x^4-25x^3-40x^2-15x+11$

$f(x-1)=x^5-10x^4+5x^3-5x^2+15x+5$

$p=5$ alınırsa i) $5 \mid 5,15,-5,5,-10$

ii) $5\nmid 1$

iii) $25\nmid 5$ asaldır.

b) $I\neq 0$ asal ideal olsun.

$I\subset J$ olacak şekilde J idealini alalım.

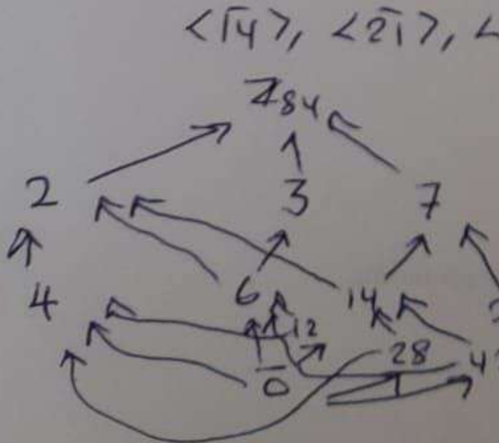
$\exists a\in J\setminus I$ için $a\notin I$

$a(1-a)=0\in I$ ve $a\notin I$, I asal

$1-a\in I\subset J$, $a\in J$, $1-a+a\in J\Rightarrow 1\in J\Rightarrow J=R$

5 a) 84'ün bölenleri 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84

idealleri $\langle\bar{1}\rangle, \langle\bar{2}\rangle, \langle\bar{3}\rangle, \langle\bar{4}\rangle, \langle\bar{6}\rangle, \langle\bar{7}\rangle, \langle\overline{12}\rangle,$
$\langle\overline{14}\rangle, \langle\overline{21}\rangle, \langle\overline{28}\rangle, \langle\overline{42}\rangle, \langle\bar{0}\rangle$



maksimal idealler $\langle\bar{2}\rangle, \langle\bar{3}\rangle, \langle\bar{7}\rangle$

b) $(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})=9\Rightarrow 3\mid 9$

$2-\sqrt{-5}=3(a+b\sqrt{-5})$ olsa $2-\sqrt{-5}=3a+3b\sqrt{-5}$

$2=3a\Rightarrow a=\frac{2}{3}\notin\mathbb{Z}$ o halde $3\nmid 2-\sqrt{-5}$