Adı Soyadı:

Numarası: **25.06.2026**

DİFERANSİYEL DENKLEMLER-II BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1. $xy''+y'=2+\sin x$ denkleminin sınıflandırmasını yaparak genel çözüm formunu yazınız (genel çözümü bulmanıza gerek yoktur).

2. $\alpha\in\mathbb{R}$ olmak üzere $y''+y'-6y=e^{\alpha x}$ denklemi verilsin. α sayısına göre özel çözümün nasıl aranacağını inceleyiniz.

3. $T=\{1,\ x,\ \ln x\}$ temel çözüm kümesine karşılık gelen diferansiyel denklemi bulunuz.

4. $y'''-\dfrac{1}{x}y''=x^3$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

5. $y''-xy'=3$ denkleminin genel çözümünü bulmak için hangi yöntemlerin uygulanabileceğini açıklayınız (genel çözümü bulmanıza gerek yoktur).

Süre: 90 dakikadır. Başarılar **Doç. Dr. Fatma HIRA**

Cevaplar

① $xy''+y'=2+\sin x$ 2. mertebe, 1. derece, lineer, değişken katsayılı, homojen olmayan denklemdir. Homojen olmayan terimler polinom ve trigonometrik fonk olduğundan her biri için ikişer ayrı özel çözüm olup genel çözüm $c_1, c_2\in\mathbb{R}$ için $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+y_{ö1}+y_{ö2}$ formundadır.

Cevap Anahtar

② $y''+y'-6y=e^{\alpha x}$

$y''+y'-6y=0$ için $\lambda^2+\lambda-6=0 \to \lambda_1=-3,\ \lambda_2=2 \to y_1=e^{-3x},\ y_2=e^{2x}$ lineer bağımsız çözümler

$\alpha\neq-3$ ve $\alpha\neq2$ için $y_ö=Ae^{\alpha x}$ $A=?$ olarak aranır.

$\alpha=-3$ veya 2 ise $y_ö=Axe^{\alpha x}$ $A=?$ olarak aranır.

③ 1. yol $T=\{1,x,\ln x\}$ ise $W(1,x,\ln x,y)=0$ açılımı dif denk verir. Yani

$$\begin{vmatrix} 1 & x & \ln x & y \\ 0 & 1 & \frac{1}{x} & y' \\ 0 & 0 & -\frac{1}{x^2} & y'' \\ 0 & 0 & \frac{2}{x^3} & y''' \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{x} & y' \\ 0 & -\frac{1}{x^2} & y'' \\ 0 & \frac{2}{x^3} & y''' \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\frac{1}{x^2} & y'' \\ \frac{2}{x^3} & y''' \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow -\frac{y'''}{x^2}-\frac{2y''}{x^3}=0$$

$$\Rightarrow xy'''+2y''=0$$

2. yol genel çözüm $y=c_1+c_2x+c_3\ln x$ olup 3 kez türev alınıp c'ler yok edilerek de aynı dif denk elde edilir.

(4) $y''' - \frac{1}{x} y'' = x^3$

1. yol: $y'' = u$ dersek $y''' = u'$ olup $u' - \frac{1}{x} u = x^3$ 1. mertebe lineer denklem elde edilir. Buradan $\lambda(x) = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$ için $\frac{1}{x} \cdot u = \int x^3 \cdot \frac{1}{x} dx + c_1 \rightarrow \frac{u}{x} = \frac{x^3}{3} + c_1 \rightarrow u = \frac{x^4}{3} + c_1 x$ olur.

$y'' = u \rightarrow \int y'' = \int \frac{x^4}{3} + c_1 x \rightarrow \int y' = \int \frac{x^5}{15} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2$

$\rightarrow y = \frac{x^6}{90} + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 x + c_3$

genel çözüm

2. yol: Denklem x^3 ile çarpılarak Cauchy Euler'e yapılıp $x = e^t$ dönüşümü ile sabit katsayılı denkleme indirgenerek de çözülebilir.

Analitik

Cevap

(5) $y'' - xy' = 3$

1. yol: $y' = u$ dersek $y'' = u'$ olup $u' - xu = 3$ 1. mertebe dur, yani mertebe düşürme yöntemi ile çözülebilir.

2. yol: $y'' \underbrace{-x}_{P_1(x)} y' = 3$ $\quad P_1(x)$ polinom olup her noktada sürekli, o halde her reel sayı adi nokta olur. Buna göre x_0 adi noktası için

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

kuvvet serisi çözümü arayabiliriz.

3. yol: Laplace dönüşümü ile çözüm aranabilir.