

Adı Soyadı :

15.01.2026

Numara :

Cevap Anahtarı

MAT 301 DİFERENSİYEL GEOMETRİ I FİNAL SINAVI SORULARI

SORU 1: $\vec{V} = (2, 2, -1) \in \mathbb{R}^3, P = \left(\frac{\pi}{2}, \pi, 0\right) \in E^3$ verilsin.

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 \sin x_2 + x_3^3 \cos x_1$ fonksiyonu için $\vec{V}_P[f]$ yöne göre türevini bulunuz.

SORU 2: $X = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, Y = 2x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2^3 \frac{\partial}{\partial x_3}, Z = x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \in \chi(E^3)$ vektör

alanları veriliyor. $p = (1, 1, 1)$ için $X_p[\langle Y, Z \rangle]$ değerini hesaplayınız.

SORU 3: $W = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_1 x_3^2 \frac{\partial}{\partial x_3} \in \chi(E^3)$ vektör alanı ve

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 x_3^2$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda

a) $\langle W, \text{rot} W \rangle = ?$, b) $\langle W, \text{grad} f \rangle = ?$

SORU 4: Gradient fonksiyonunu tanımlayınız ve lineer olduğunu gösteriniz.

SORU 5: $F: E^n \rightarrow E^m$ dönüşümünün F . türev dönüşümüne

$$\phi = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_P, 1 \leq i \leq n \right\} \subset T_{E^n}(P) \text{ ve } \psi = \left\{ \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{F(P)}, 1 \leq j \leq m \right\} \subset T_{E^m}(F(P))$$

bazlarına göre karşılık gelen matrisi bulunuz.

Not: Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır.

Başarılar
Prof.Dr. İsmail AYDEMİR

$$1) \quad \vec{V}_p[f] = \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p \quad p = \left(\frac{\pi}{2}, \pi, 0\right)$$

$$= v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_p + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_p + v_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} \Big|_p$$

$$= 2 \cdot (2x_1 \sin x_2 - x_3^2 \sin x_1) \Big|_p + 2 \cdot (x_1^2 \cos x_2) \Big|_p - 1 \cdot (3x_3^2 \cos x_1)$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin \pi - 0 \cdot \sin \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \cos \pi -$$

$$= -\frac{\pi^2}{2} \quad \#$$

$$2) \quad W = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_1 x_3^2 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$a) \quad \text{rot } W = \nabla \times W = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_2 & x_1 x_2 & -x_1 x_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= (0, x_3^2, x_2 - 1)$$

$$\begin{aligned} \langle W, \text{rot } W \rangle &= (x_2, x_1 x_2, -x_1 x_3^2), (0, x_3^2, x_2 - 1) \\ &= x_1 x_3^2 \end{aligned}$$

$$b) \quad \text{grad } f = (1, x_3^2, 2x_3 x_2)$$

$$\langle W, \text{grad } f \rangle = x_2 + x_1 x_2 x_3^2 - 2x_1 x_2 x_3^3 \quad \#$$

4. ve 5. soru için dftlere bakınız.

SORU 2.

$$\langle Y, Z \rangle = \langle (2x_1^2, 0, x_2^3), (0, x_1^2, x_3) \rangle = x_2^3 x_3$$

$$X_p [\underbrace{\langle Y, Z \rangle}_f] = X_p [f] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p = x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_p + x_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_p + x_3 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_3} \Big|_p$$

$$X = \begin{pmatrix} \underbrace{x_1}_{x_1}, & \underbrace{-x_2}_{x_2}, & \underbrace{0}_{x_3} \end{pmatrix}$$

$$= \cancel{x_1 \cdot 0 \Big|_p} - x_2 \cdot (3x_2^2 x_3) \Big|_p + \cancel{\frac{x_3}{0} \cdot x_2^3 \Big|_p}$$

$$= -x_2 \cdot \underbrace{3 \cdot x_2^2(p)}_1 \cdot \underbrace{x_3(p)}_1$$

$$= -3x_2$$