

Adı Soyadı :

27.01.2026

Numara :

Cevap Anonim

**MAT 301 DİFERENSİYEL GEOMETRİ I BÜTÜNLEME SINAVI
SORULARI**

SORU 1: $X = 2x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - 3x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3^2 \frac{\partial}{\partial x_3}$, $Y = x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \in \chi(E^3)$ vektör alanları için $D_X Y = ?$.

SORU 2: $[\cdot, \cdot]$, $\chi(E^n)$ üzerinde Lie operatörü ve $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$, $\chi(E^n)$ uzayının standart bazı olmak üzere $1 \leq i, j \leq n$ için

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0$$

olduğunu gösteriniz.

SORU 3: Bir $\vec{V}_p$ tanjant vektörü yönündeki türevi tanımlayınız ve lineer olduğunu gösteriniz.

SORU 4: $F: E^n \rightarrow E^m$ dönüşümünün F türev dönüşümüne

$$\phi = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_P, 1 \leq i \leq n \right\} \subset T_{E^n}(P) \text{ ve } \psi = \left\{ \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{F(P)}, 1 \leq j \leq m \right\} \subset T_{E^m}(F(P))$$

bazlarına göre karşılık gelen matrisi bulunuz.

SORU 5: $X = x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1^2 - x_3^2) \frac{\partial}{\partial x_2} + e^{x_3} \frac{\partial}{\partial x_3}$ vektör alanı için $\text{rot}(X) = ?$.

Not: Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır.

Başarılar
Prof.Dr. İsmail AYDEMİR

Soru 1: $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0$, $1 \leq i, j \leq n$ old gösterini

Çözüm: $[X, Y]: \mathcal{X}(E^n) \times \mathcal{X}(E^n) \rightarrow \mathcal{X}(E^n)$

$[X, Y](f) = X[Y(f)] - Y[X(f)]$ dönüşümü ile tanımlan

bir Lie operatörüdür

Buna göre $\forall f \in C^\infty(E^n, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} [X, Y](f) &= \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] (f) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (f) \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (f) \right] \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = 0 = 0[f] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [X, Y] = 0 \quad \#$$

Soru 3 ve Soru 4 için deftere bakınız

$$5) \quad X = x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1^2 - x_3^2) \frac{\partial}{\partial x_2} + e^{x_3} \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$X = \sum_{i=1}^3 f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(E^3) \quad \text{öü}$$

$$\text{rot}: \chi(E^3) \longrightarrow \chi(E^3)$$

$$X \longrightarrow \text{rot}(X) = \nabla \times X$$

biçimindeydi. Böylece $f_1 = x_2^2$, $f_2 = (x_1^2 - x_3^2)$, $f_3 = e^{x_3}$ öü

$$\text{rot } X = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_2^2 & x_1^2 - x_3^2 & e^{x_3} \end{vmatrix}$$

$$\left(\left(\frac{\partial(e^{x_3})}{\partial x_2} - \frac{\partial(x_1^2 - x_3^2)}{\partial x_3} \right), - \left(\frac{\partial(e^{x_3})}{\partial x_1} + \frac{\partial(x_2^2)}{\partial x_3} \right), \left(\frac{\partial(x_1^2 - x_3^2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(x_2^2)}{\partial x_2} \right) \right)$$

$$\left(0, -2x_3, 2x_1 - 2x_2 \right) \quad \#$$

$$1) \quad X = (2x_1, -3x_2, x_3^2)$$

$$Y = (x_1^2, x_1x_2, -x_3)$$

$$D: X(E^3) \times X(E^3) \rightarrow X(E^3)$$

$$(X, Y) \rightarrow D_X Y = (X[y_1], X[y_2], X[y_3])$$

$$X[y_1] = 2x_1 \cdot \frac{\partial(x_1^2)}{\partial x_1} - 3x_2 \cdot \frac{\partial(x_1^2)}{\partial x_2} + x_3^2 \cdot \frac{\partial(x_1^2)}{\partial x_3}$$

$$\downarrow$$

$$x_1^2$$

$$= 2x_1 \cdot 2x_1 = 4x_1^2$$

$$X[y_2] = 2x_1 \cdot \frac{\partial(x_1x_2)}{\partial x_1} - 3x_2 \cdot \frac{\partial(x_1x_2)}{\partial x_2} - x_3^2 \cdot \frac{\partial(x_1x_2)}{\partial x_3}$$

$$\downarrow$$

$$x_1x_2$$

$$= 2x_1 \cdot x_2 - 3x_2 \cdot x_1 = -x_2x_1$$

$$X[y_3] = -x_3^2$$

$$D_X Y = (4x_1^2, -x_2x_1, -x_3^2) \quad \#$$