Ad : 16.07.2024

Soyad

Numara :

MAT 302 DİFERENSİYEL GEOMETRİ II BÜTÜNLEME SORULARI

SORU 1 M, E^3 de (I,α) koordinat komşuluğu ile verilmiş yay-parametreli bir eğri ve burulması τ olsun. M düzlemsel ise $\tau = 0$ dır, gösteriniz. (20p)

SORU 2 α birim hızlı eğrisinin eğriliği $\kappa(s) \neq 0$ olsun. α nın burulmasının $\tau = \dfrac{\langle \alpha', \alpha'' \wedge \alpha''' \rangle}{\|\alpha''\|^2}$ olduğunu gösteriniz. (20p)

SORU 3 $\phi : E^2 \to E^3, (u,v) \to \phi(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$ ile tanımlanan $M = \phi(E^2)$ yüzeyinin,

a) Şekil operatörüne karşılık gelen matrisi bulunuz.
b) Gauss eğriliğini bulunuz.
c) Ortalama eğriliğini bulunuz. (30p)

SORU 4 $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ eğrisinin oskülatör, normal ve rektifiyan denklemlerini bulunuz. (30p)

Not: Süre 90 dakikadır.

Başarılar
Prof.Dr. İsmail AYDEMİR

Diferansiyel Geometri II Bütünleme
Cevap Anahtarı

Soru 1) Çözümü için deftere bakınız

Soru 2) Çözümü için deftere bakınız

Soru 3) $\phi : E^2 \longrightarrow E^3$

$(u,v) \longrightarrow \phi(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$

a) $\phi_u = (-\sin u, \cos u, 0)$

$\phi_v = (0, 0, 1)$

$\{\phi_u, \phi_v\}$, $\chi(M)$ in bir bazıdır. $N = \dfrac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|}$

$$\phi_u \times \phi_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos u, \sin u, 0)$$

$\|\phi_u \times \phi_v\| = 1 \quad \Rightarrow \quad N = (\cos u, \sin u, 0)$

$$S(\phi_u) = D_{\phi_u} N = \frac{\partial N}{\partial u} = (-\sin u, \cos u, 0) = 1.\phi_u + 0.\phi_v$$

$$S(\phi_v) = D_{\phi_v} N = \frac{\partial N}{\partial v} = (0, 0, 0) = 0.\phi_u + 0.\phi_v$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $K = \det S = 0$

c) $H = \frac{1}{2} \text{iz} S = \frac{1}{2} 1 = \frac{1}{2}$

SORU 4) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$

$\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2)$ $\qquad \|\alpha'(t)\| \neq 1$ birim hızlı değil

$\alpha''(t) = (0, 2, 6t)$

$\alpha'''(t) = (0, 0, 6)$

Oskülatör düzlem: T ve N vektörlein gerdiği düzlem, normali B

$T = \dfrac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$, $N = B \times T$, $B = \dfrac{\alpha' \otimes \alpha''}{\|\alpha' \otimes \alpha''\|}$

$\langle \overrightarrow{\alpha(t)X}, B \rangle = 0 \Rightarrow \langle \alpha(t)X, \alpha' \times \alpha'' \rangle = 0$

$= \det(\alpha(t)X, \alpha', \alpha'') = 0$

$$= \begin{vmatrix} x-t & y-t^2 & z-t^3 \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 0$$

$(x-t)\underbrace{(12t^2 - 6t^2)}_{6t^2} - 1.\left(\underbrace{(y-t^2)6t}_{6ty-6t^3} - \underbrace{2(z-t^3)}_{2z+2t^3}\right)$

$6t^2x - \cancel{6t^3} - 6ty + \cancel{6t^3} - 2z - 2t^3$

$$\boxed{6t^2x - 6ty - 2z - 2t^3 = 0}$$

Normal düzlem

N ve B vek gerdiği düzlem. Nomali T

$\langle \overrightarrow{\alpha(t)X}, T \rangle = 0 \Rightarrow \langle \overrightarrow{\alpha(t)X}, \alpha' \rangle = 0$

$\langle (x-t, y-t^2, z-t^3)(1, 2t, 3t^2) \rangle = 0$

$x - t + 2ty - 2t^3 + 3t^2z - 3t^5 = 0$

$$\boxed{x - 2ty + 3t^2z - 3t^5 - 2t^3 - t = 0}$$

Rektifiyan düzlem

B ve T nin gerdiği düzlem

$\det(\overrightarrow{\alpha(t)X}, T, B) = 0 \Rightarrow \det(\overrightarrow{\alpha(t)X}, \alpha', \alpha' \times \alpha'') = 0$

$$\alpha' \times \alpha'' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = (6t^2, -6t, 2)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-t & y-t^2 & z-t^3 \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 6t^2 & -6t & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-t)\begin{vmatrix} 2t & 3t^2 \\ -6t & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} y-t^2 & z-t^3 \\ -6t & 2 \end{vmatrix} + 6t^2\begin{vmatrix} y-t^2 & z-t^3 \\ 2t & 3t^2 \end{vmatrix}$$

$$(x-t)(4t+18t^3) - (2y-2t^2+6tz-6t^4 + 6t^2(3t^2y-3t^4-2tz+2t^4)$$

$$(4t+18t^3)x + (-2+18t^4)y + (6t-12t^4)z = -\cancel{4t^2} - \cancel{18t^4} + \cancel{2t^2} + \cancel{6t^4} - 18t^6 \cancel{+12t^6}$$

$$-2t^2 - 12t^4 - 6t^6$$

#