

Adı :
Soyadı
Numara :

30.06.2025

Cevap Anahtarı

MAT 302 DİFERENSİYEL GEOMETRİ II BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

- SORU 1** $\alpha(s) = \left(\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t \right)$ parametrik denklemi ile verilen α eğrisinin κ eğriliğini ve τ burulmasını hesaplayınız.
- SORU 2** Geodezik eğrilerin her noktada hız vektörlerinin uzunlukları sabit dir, ispatlayınız.
- SORU 3** E'' de M bir hiperyüzey olmak üzere M üzerinde X_p ve Y_p farklı asli eğriliklere karşılık gelen asli doğrultular ise X_p ve Y_p ortogonaldır, ispatlayınız.
- SORU 4** 3-Boyutlu uzayda verilen r yarı-çaplı küre yüzeyinin şekil operatörünün matrisini hesaplayınız.
- SORU 5** $z^2 = x^2 + y^2 - 1$ tek kanatlı hiperboloidi veriliyor.
- Yüzey olduğunu gösteriniz.
 - Yüzeyi parametrik olarak ifade ediniz.
 - Yüzeyin birim normal vektör alanını bulunuz.
 - $P(1, -1, 1)$ noktasındaki teğet denklemini yazınız.

Not: Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır.

Başarılar
Prof.Dr. İsmail AYDEMİR

Cevap Anahor

Soru 5:

$$z^2 - x^2 - y^2 + 1 = 0$$

a)

$$F(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2 + 1$$

$$\vec{\nabla} F = (-2x, -2y, 2z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ için yüzeydir}$$

$$b) \quad \phi(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2 - 1})$$

$$c) \quad N = \frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|} = \frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|} = 2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$N = \frac{(-x, -y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$d) \quad \vec{\nabla} f|_p = (-2, 2, 2)$$

$$\text{Teget denklemi} \quad \langle \vec{pX}, \vec{\nabla} f|_p \rangle = 0$$

$$\langle (x-1, y+1, z-1), (-2, 2, 2) \rangle = 0$$

$$-x + y + z + 1 = 0$$

Soru 4:

Küre Denklemi

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$\nabla f = (2x, 2y, 2z)$$

$$N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{(2x, 2y, 2z)}{\sqrt{4(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{(2x, 2y, 2z)}{2r} = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$$

$$S(x) = D_x N = \left(x \left[\frac{1}{r} x \right], x \left[\frac{1}{r} y \right], x \left[\frac{1}{r} z \right] \right)$$

$$V_p[f] = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p \quad \text{olduğuna Diferansiyel Geometriye biliyorsanız}$$

$$X = (x_1, x_2, x_3) \text{ olsun.}$$

$$x \left[\frac{1}{r} x \right] = x_1 \cdot \frac{1}{r} + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 = \frac{1}{r} x_1$$

$$x \left[\frac{1}{r} y \right] = \frac{1}{r} x_2$$

$$x \left[\frac{1}{r} z \right] = \frac{1}{r} x_3$$

$$\text{Yani } S(x) = \frac{1}{r} (x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{r} X.$$

$$S(y) = \frac{1}{r} Y \quad \text{olar}$$

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

elde edilir