01.06.2026

Adı-Soyadı:

Numara:

MAT 304 FONKSİYONEL ANALİZ DERSİ FİNAL SORULARI

1) $d:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $d(x,y)=\left|x^2-y^2\right|$ fonksiyonu $\mathbb{Z}$ üzerinde bir metrik midir? Açıklayınız. (10 puan)

2) $\left(\mathbb{R}^2,d_a\right)$ ayrık metrik uzayında $B((0,1),1)$, $B((0,1),2)$ ve $B\left((0,1),\frac{1}{2}\right)$ açık yuvarlarını, $B[(0,1),1]$, $B[(0,1),2]$ ve $B\left[(0,1),\frac{1}{2}\right]$ kapalı yuvarlarını bulunuz ve her bir yuvarı $\mathbb{R}^2$ üzerinde çiziniz. (15 puan)

3) $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ için $d_2(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(x_i-y_i)^2}$ olmak üzere $\left(\mathbb{R}^2,d_2\right)$ metrik uzayında $x_n=\left(1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)$ genel terimli (x_n) dizisinin $(1,1)\in\mathbb{R}^2$ noktasına yakınsadığını gösteriniz. (15 puan)

4) $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0<y\le 1\right\}$ kümesi veriliyor. $\mathbb{R}^2$ üzerinde her $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ için $d_2(x,y)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ ile tanımlı alışılmış d_2 metriğine göre

a) A kümesinin açık küme ve kapalı küme olup olmadığını belirleyiniz. (5 puan)

b) A kümesinin iç noktaları kümesini (yani A° kümesini) bulunuz. (5 puan)

c) A kümesinin dışını (yani $dışA$ kümesini) bulunuz. (5 puan)

5) l_1 uzayı üzerinde her $x=(x_n)\in l_1$ için $\|x\|_1=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ ve $\|x\|_2=\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$ ile tanımlı $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normlarının denk olmadığını gösteriniz. (15 puan)

6) $\left(X,\|\cdot\|_1\right)$ ve $\left(Y,\|\cdot\|_2\right)$ iki Banach uzay ve $Z=X\times Y$ olsun. Buna göre her $(x,y)\in Z$ için $\|(x,y)\|=3\|x\|_1+8\|y\|_2$ ile tanımlı $\|\cdot\|$ fonksiyonu Z üzerinde bir norm ise Z nin bu norma göre bir Banach uzay olduğunu gösteriniz. (15 puan)

7) $C([0,1])=\{f:[0,1]\to\mathbb{R} \mid f \text{ sürekli}\}$ kümesi üzerinde $\|f\|=\int_0^1|f(x)|dx$ normunu ele alalım. Buna göre $f(x)=e^{2x}$ ve $g(x)=e^{3x}$ olmak üzere $f\in B\left(g,e^2\right)$ midir? Açıklayınız. (15 puan)

Not: Süre 90 dakikadır.

Başarılar...

Doç. Dr. Nilay DEĞİRMEN

1) $d: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad d(x,y) = |x^2 - y^2|$

$d(1,-1) = |1^2 - (-1)^2| = 0$ } olduğundan d, $\mathbb{Z}$ üzerinde bir metrik değildir.

$1 \neq -1$

2) $B((0,1),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_a((x,y),(0,1)) < 1\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_a((x,y),(0,1)) = 0\}$

$= \{(0,1)\}$

$B((0,1),2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_a((x,y),(0,1)) < 2\}$

$\neq 0 \quad \to 1$

$= \mathbb{R}^2$

$B((0,1),\frac{1}{2}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_a((x,y),(0,1)) < \frac{1}{2}\}$

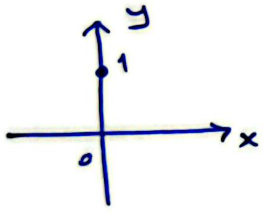
$\downarrow 0$

$= \{(0,1)\}$

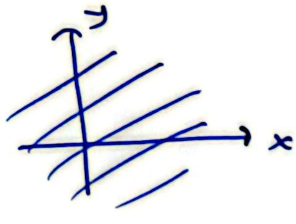
$B[(0,1),1] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_a((x,y),(0,1)) \leq 1\} = \mathbb{R}^2$

$B[(0,1),2] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_a((x,y),(0,1)) \leq 2\} = \mathbb{R}^2$

$B[(0,1),\frac{1}{2}] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_a((x,y),(0,1)) \leq \frac{1}{2}\} = \{(0,1)\}$



$B((0,1),1)$
$B((0,1),\frac{1}{2})$
$B[(0,1),\frac{1}{2}]$



$B((0,1),2)$
$B[(0,1),1]$
$B[(0,1),2]$

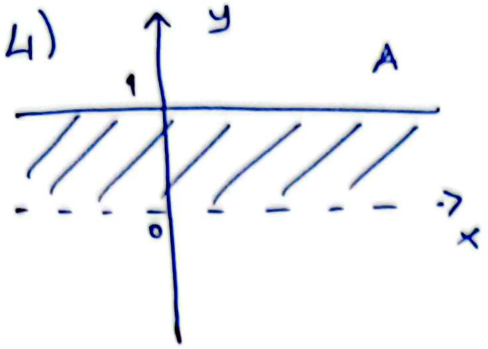
3) $(1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}) \xrightarrow{d_2} (1,1)$ mi? $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall n \geq n_0$ old.

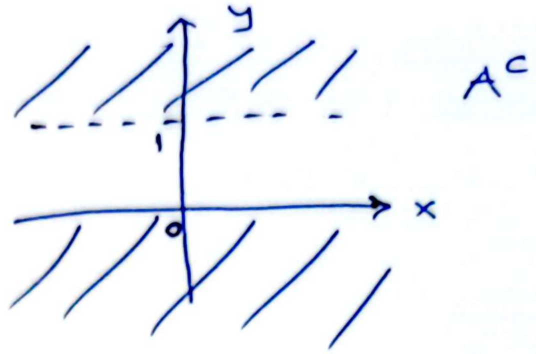
$d_2((1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}),(1,1)) < \varepsilon$ o.s. $n_0 \in \mathbb{N}$ var mı?

$d_2((1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}),(1,1)) = \sqrt{(\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2} = \frac{\sqrt{2}}{n} \leq \frac{\sqrt{2}}{n_0} < \varepsilon$

$n_0 = \left[\!\left| \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \right|\!\right] + 1 \in \mathbb{N}$

4)





a) $(0,1)\in A$ için $B((0,1),r)\subset A$ o.s. $r>0$ yok. Dolayısıyla A açık küme değildir.

$(0,0)\in A^c$ için $B((0,0),r)\subset A^c$ o.s. $r>0$ yok. Dolayısıyla A^c açık değil, A kapalı değildir.

b) $y=1$ doğrusu üzerindeki hiçbir nokta iç nokta olamaz.

$0<y<1$ için $\varepsilon=\min\{y,1-y\}$ seçilirse $B((x,y),\varepsilon)\subset A$ olur. Dolayısıyla $A^\circ=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0<y<1\}$ dir.

c) dış $A=(A^c)^\circ=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y>1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y<0\}$

5) $\|x\|_2=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|x_n|\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|=\|x\|_1 \quad \dots (1)$

$\forall k\in\mathbb{N}$ için $q_k=1-\frac{1}{k}$ o.ü. $(x_n)=(q_k^{\,n-1})$ dizisini ele alalım.

$$\|x_n\|_2=\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|=1$$

$$\|x_n\|_1=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|=\sum_{n=1}^{\infty}|q_k^{\,n-1}|=\sum_{n=1}^{\infty}q_k^{\,n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(q_k^0+q_k^1+q_k^2+\dots+q_k^{\,n-1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(q_k)^n}{1-q_k}\overset{|q_k|<1}{=}\frac{1}{1-q_k}=\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{k}\right)}=k$$

$\|x_n\|_1\le m\cdot\|x_n\|_2$ o.s. $m>0$ var mı?

$k\le m\cdot 1,\quad k\in\mathbb{N}$

Tüm doğal sayılardan büyük bir reel sayı var olmadığından böyle bir $m>0$ yoktur. Dolayısıyla $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ denk değildir.

6) $\forall (z_n) \subset Z$ C.D. alalım.

$z_n = (x_n, y_n)$ o.s. $(x_n) \subset X$ ve $(y_n) \subset Y$ vardır.

(z_n) CD old. $\forall \varepsilon > 0$ ver. $\forall m, n \geq n_0$ old.

$$\| (x_n, y_n) - (x_m, y_m) \| < \varepsilon$$

o.s. $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

$$\| (x_n, y_n) - (x_m, y_m) \| = \| (x_n - x_m, y_n - y_m) \|$$

$$= 3 \| x_n - x_m \|_1 + 8 \| y_n - y_m \|_2$$

$$< \varepsilon$$

old. $(x_n) \subset X$ ve $(y_n) \subset Y$ birer C.D. dir. X ve Y Banach old $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ o.s. $x \in X$ ve $y \in Y$ vardır. $(x, y) \in Z$ old. açıktır.

$z_n \to (x, y)$ old. gösterelim. $\forall \varepsilon > 0$ ver $\forall n \geq n_1$ old. $\| (x_n, y_n) - (x, y) \| < \varepsilon$ o.s. $n_1 \in \mathbb{N}$ var mı?

$x_n \to x$ old. $\forall \varepsilon > 0$ ver. $\forall n \geq n_2$ old. $\| x_n - x \|_1 < \frac{\varepsilon}{6}$ o.s. $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır.

$y_n \to y$ old. $\forall \varepsilon > 0$ ver. $\forall n \geq n_3$ old $\| y_n - y \|_2 < \frac{\varepsilon}{16}$ o.s. $n_3 \in \mathbb{N}$ vardır.

$\max\{n_2, n_3\} = n_1$ seçilirse $\forall n \geq n_1$ old.

$$\| (x_n, y_n) - (x, y) \| = \| (x_n - x, y_n - y) \|$$

$$= 3 \| x_n - x \|_1 + 8 \| y_n - y \|_2$$

$$< 3 \cdot \frac{\varepsilon}{6} + 8 \cdot \frac{\varepsilon}{16} = \varepsilon$$

olur. Böylece $z_n \to (x, y)$ olup Z Banachtır

7) $f \in B(g, e^2)$ mi? Yani $\|f-g\| < e^2$ mi?

$$\|f-g\| = \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx$$

$$= \int_0^1 |e^{2x}-e^{3x}|\,dx = \int_0^1 e^{3x}-e^{2x}\,dx$$

$$= \left(\frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{2x}}{2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{2e^3-3e^2+1}{6} < e^2$$

old. $f \in B(g, e^2)$ dir.