Adı Soyadı: 16.07.2024
Numarası:

MAT 468 FONKSİYONEL ANALİZ BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) (X,d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda $A \subset A^{\circ}$ kapsaması her zaman doğru mudur? Evet ise ispatlayınız, hayır ise örnek veriniz. (15 puan)

2) (X,d) bir tam metrik uzay ve $(x_n) \subset X$ olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n}$ ise (x_n) dizisinin X de yakınsak olduğunu gösteriniz. (20 puan)

3) (X,d) ayrık metrik uzayında d ayrık metriğinin herhangi bir normdan elde edilemeyeceğini gösteriniz. (15 puan)

4) Normlu uzaylarda yakınsak her dizinin sınırlı olduğunu gösteriniz. (10 puan)

5) X ve Y iki normlu uzay, $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$, X üzerinde iki denk norm ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer f, X üzerindeki $\|\cdot\|_1$ normuna göre sürekli ise $\|\cdot\|_2$ normuna göre de süreklidir, ispatlayınız. (10 puan)

6) $C[0,1]$ sürekli fonksiyonlar uzayı her $f \in C[0,1]$ için $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\,dt$ ile tanımlı $\|\cdot\|$ normuna göre Banach mıdır? Açıklayınız. (15 puan)

7) $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayı Banach ise bu uzayda mutlak yakınsak her seri yakınsaktır, ispatlayınız. (15 puan)

Not: Süre 90 dakikadır.

Başarılar…
Doç. Dr. Nilay DEĞİRMEN

2) (x_n) C.D. mi? Yani $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall n, m \geqslant n_0$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ var mı?

$n < m$ olsun

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+3}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m)$$

$$< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}}$$

$$= \frac{1}{2^n}\left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2^n}\left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}}{1 - \frac{1}{2}}\right]$$

$$< \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \underbrace{\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}\right)}_{<1}$$

$$< \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \Rightarrow n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow n_0 = \left[\left|\frac{1}{\varepsilon}\right|\right] + 1 \in \mathbb{N}$$

3) d ayrık metriği bir normdan elde edilseydi; $\forall x \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için

$$d(\alpha x, 0) = \|\alpha x - 0\| = \|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\| = |\alpha| . d(x, 0)$$

eşitliği sağlanırdı. Ancak $x \neq 0$ ve $\alpha = 2$ için

$$\left.\begin{array}{l} d(2x, 0) = 1 \\ |2| . d(x, 0) = 2 \end{array}\right\}$$ olup çelişki elde edilir.

4) Arasınav sorusu

5) Final sorusu

7) Notlarda var

4) $x_n \to x$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall n \geq n_0$ olduğunda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

$$\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leq \|x_n - x\| < \varepsilon \quad \text{old. } \forall n \geq n_0 \text{ için}$$

$\|x_n\| < \|x\| + \varepsilon$ olur $\forall n \geq n_0$. $M = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_{n_0 - 1}\|, \|x\| + \varepsilon\}$ seçilirse $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| \leq M$ olup (x_n) sınırlıdır.

6)
$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ nt - \frac{n}{2}, & \frac{1}{2} < t \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

(f_n), $\|.\|$ normuna göre Cauchy dizisidir.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

(f_n), $\|.\|$ normuna göre f fonksiyonuna yakınsar.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{t \to \frac{1}{2}^-} f(t) = 0 \\ &\lim_{t \to \frac{1}{2}^+} f(t) = 1 \\ &f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0 \end{aligned}\right\}$$

$0 \neq 1$ olduğundan f, $t = \frac{1}{2}$ de sürekli değildir. Dolayısıyla $f \notin C[0,1]$ dir.

Böylece $C[0,1]$ Banach olamaz.