18.04.2026

Adı-Soyadı:

Numara:

MAT 304 FONKSİYONEL ANALİZ DERSİ ARASINAV SORULARI

1) $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $d(x,y)=\left|\dfrac{x}{1+|x|}-\dfrac{y}{1+|y|}\right|$ metriği veriliyor. Buna göre

a) Her $n\in\mathbb{N}$ için $x_n=n$ olmak üzere $(x_n)=(n)$ dizisinin $(\mathbb{R},d)$ metrik uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz. **(10 puan)**

b) $(\mathbb{R},d)$ metrik uzayının tam metrik uzay olmadığını gösteriniz. **(15 puan)**

2) Bir metrik uzayda her yerde yoğun olan iki kümenin kesişimi her zaman boştan farklı mıdır? Evet ise ispatlayınız, hayır ise örnek veriniz. **(15 puan)**

3) (X,d) bir metrik uzay ve $(x_n),(y_n)\subset X$ olsun. $x_n\to x$ ve $y_n\to y$ ise $d(x_n,y_n)\to d(x,y)$ olduğunu ispatlayınız. **(15 puan)**

4) Her $z,w\in\mathbb{C}$ için $d_a(z,w)=\begin{cases}0, & z=w\\ 1, & z\neq w\end{cases}$ olmak üzere $(\mathbb{C},d_a)$ ayrık metrik uzayı için

a) $B(i,1)$ ve $B[i,1]$ yuvarlarını bulunuz. **(10 puan)**

b) $\{2+i,2-i\}$ kümesinin $\mathbb{C}$ de hem açık hem de kapalı küme olduğunu gösteriniz. **(10 puan)**

5) $x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ için $d_2(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(x_i-y_i)^2}$ olmak üzere $(\mathbb{R}^2,d_2)$ metrik uzayında $A=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:1\leq x_1^2+x_2^2<4\}$ kümesi veriliyor.

a) A kümesinin içini bulunuz. **(10 puan)**

b) A kümesinin açık küme olup olmadığını belirleyiniz. **(5 puan)**

c) A kümesinin sınırını bulunuz. **(10 puan)**

Not: Süre 90 dakikadır.

Başarılar...

Doç. Dr. Nilay DEĞİRMEN

CamScanner ile tarandı

1) a) $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall n, m \geq n_0$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ var mı?

$$d(x_n, x_m) = \left| \frac{n}{1+n} - \frac{m}{1+m} \right| = \left| \left(1 - \frac{1}{1+n}\right) - \left(1 - \frac{1}{1+m}\right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{1+m} - \frac{1}{1+n} \right|$$

$$\leq \frac{1}{1+m} + \frac{1}{1+n}$$

$$\leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

$$\leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} = \frac{2}{n_0} < \varepsilon$$

$$\frac{n_0}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n_0 = \left[\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right] + 1 \in \mathbb{N}$$

olduğundan $(x_n) = (n)$ bir Cauchy dizisidir.

b) $(\mathbb{R}, d)$ nin tam olduğunu kabul edelim. Bu durumda $(x_n) = (n)$ dizisinin bu uzayda bir $L \in \mathbb{R}$ limitine yakınsaması gerekir.

$$x_n \xrightarrow{d} L \quad , \quad \underset{\substack{\| \\ n}}{d(x_n, L)} \to 0$$

$$\lim_{n \to \infty} d(n, L) = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n}{1+|n|} - \frac{L}{1+|L|} \right| = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{1+n} - \frac{L}{1+|L|} = 0$$

$$1 - \frac{L}{1+|L|} = 0 \Rightarrow \frac{L}{1+|L|} = 1$$

<u>1. Durum:</u> $L \geq 0$ olsun.

$$\frac{L}{1+L} = 1 \Rightarrow 1 = 0$$

<u>2. Durum:</u> $L < 0$ olsun.

$$\frac{L}{1-L} = 1 \Rightarrow L = \frac{1}{2}$$

İki durumda mümkün değil.

O halde kabul yanlış.

$x_n \to L$ o.s. bir L yok.

Dolayısıyla $(\mathbb{R}, d)$ tam değildir.

CamScanner ile tarandı

2) $(\mathbb{R}, d_2)$ alışılmış metrik uzayını ele alalım.

$\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ de her yerde yoğun

$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$

Cevap hayır.

3) $x_n \to x$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall n \geq n_1$ olduğunda

$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ o.ş. $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır.

$y_n \to y$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall n \geq n_2$ olduğunda

$d(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ o.ş. $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır.

$\forall \varepsilon > 0$ için

$n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ seçersek; $\forall n \geq n_0$ olduğunda

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ dir.

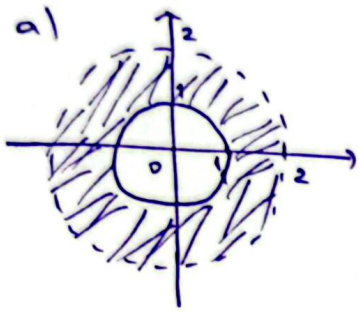
CamScanner ile tarandı

4) a) $B(i,1) = \{z \in \mathbb{C} : \underbrace{d_a(i,z)}_{=0} < 1\} = \{i\}$

$B[i,1] = \{z \in \mathbb{C} : \underset{0}{d_a(i,z)} \leq \underset{1}{1}\} = \mathbb{C}$

b) Ayrık metrik uzaylarda her küme hem açık hem de kapalıdır. Dolayısıyla $\{2+i, 2-i\} \subset \mathbb{C}$ hem açık hem de kapalıdır.

5) a)



$\forall (x_1, x_2) \in A$ alalım.

$x_1^2 + x_2^2 = 1$ olsun. Bu durumda

$B((x_1,x_2), r) \subset A$

olacak şekilde $r > 0$ yoktur. Yani $(x_1, x_2) \notin A^\circ$ dir

$1 < x_1^2 + x_2^2 < 4$ olsun. $r = \min\{2 - \sqrt{x_1^2+x_2^2}, \sqrt{x_1^2+x_2^2} - 1\}$ seçilirse

$B((x_1,x_2), r) \subset A$ olur. Dolayısıyla $(x_1, x_2) \in A^\circ$ dır.

$A^\circ = \{(x_1,x_2) \in A : 1 < x_1^2 + x_2^2 < 4\}$

b) $A^\circ \neq A$ olduğunda A açık küme değildir.

c) $\partial A = \bar{A} - A^\circ = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 4\}$

$\bar{A} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$

CamScanner ile tarandı