10.11.2024

Ad - Soyad :

Numara :

KODLAMA TEORİSİ I ARASINAV

SORULARI

1) x^2+x+2 polinomunu kullanarak $\mathbb{F}_9$ cisminin çarpım tablosunu oluşturunuz ve alt cisimlerini bulunuz.

2) $\mathbb{F}_3$ üzerinde tanımlı C lineer kodunun üreteç matrisi

$$G=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$$

olsun.

i) 22 ve 11 vektörlerini dekodlayınız.

ii) C kodunun dualini bulunuz.

3) $A=\{0,1,\alpha\}$,

+	0	1	α
0	0	1	α
1	1	α	0
α	α	0	1

·	0	1	α
0	0	0	0
1	0	1	α
α	0	α	1

olmak üzere $(A,+,\cdot)$ üç elemanlı bir cisim olsun. $(x_1,x_2)\in A^2$ mesaj vektörü, $(x_2, x_1, x_1+x_2, \alpha x_1+x_2)$ olarak kodlanıyorsa bu kodlamada kullanılan C lineer kodu için;

i) $G=?$, $H=?$

ii) C mükemmel bir kod mudur? Gösteriniz.

iii) $(\alpha,1)$ vektörünü kodlayınız.

4) C, $\mathbb{F}_q$ üzerinde tanımlı bir $[n,k]$-kod olsun.

$$D=\{(x_0,x_1,x_2,\dots,x_n)\in \mathbb{F}_q^{n+1} : (x_1,x_2,\dots,x_n)\in C,\ x_0^2+x_1^2+\dots+x_n^2=0\}$$

şeklinde tanımlansın.

i) $q=2^k$, $k\in\mathbb{Z}_+$ ise D lineer kod mudur? Gösteriniz.

ii) $C=C^\perp$ ise D lineer kod mudur? Gösteriniz.

BAŞARILAR

NOT: Sınav süreniz 100 dk.

CEVAPLAR

1) $F_9 \cong F_3[x]/\langle x^2+x+2\rangle$

$$= \{ a_0 + a_1 x : a_0, a_1 \in F_3 \}$$

$$= \{0, 1, 2, x, 2x, 1+x, 1+2x, 2+x, 2+2x\}$$

olmak üzere çarpım tablosu ders notlarınızdaki gibi yapılır.

$9 = 3^2$, $d|2$ olmak üzere F_{3^1} ve F_{3^2} alt cisimleridir.

2) $C = \{00, 12, 21\}$ olmak üzere $3^{2-1} = 3$ tane denklik sınıfı elde ederiz.

i)

$$\begin{matrix} 00 & 12 & 21 & = 00 + C \\ 10 & 22 & 01 & = 10 + C \\ 20 & 02 & 11 & = 20 + C \end{matrix}$$

olmak üzere

22 vektörü $x = 22 - 10 = 12$ olarak dekodlanır.

11 vektörü $x = 11 - 20 = 21$ olarak dekodlanır.

ii) $G = [12] \Rightarrow H = [11]$ olmak üzere

$$C^{\perp} = \{00, 11, 22\}$$

elde edilir.

3) i) $G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow H = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ii) $d = 3 = 2t + 1 \Rightarrow t = 1$

$$3^2 \left\{ \binom{4}{0} + \binom{4}{1}(3-1) \right\} = 3^2 \{1 + 8\} = 3^4 = q^n$$

olup C kodu mükemmeldir.

iii) $(a, 1) \longrightarrow (1, a, 1+a, a.a+1) = (1, a, 0, a)$

4) i) • $D \subseteq \mathbb{F}_q^{n+1}$

• $0^2+0^2+\cdots+0^2=0 \Rightarrow (0,0,\ldots,0) \in D \Rightarrow D \neq \emptyset$

• $\forall\, x,y \in D$ için $x+y \in D$ midir?

$x \in D \Rightarrow x=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$, $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in C$,
$x_0^2+x_1^2+\cdots+x_n^2=0$

$y \in D \Rightarrow y=(y_0,y_1,\ldots,y_n)$, $(y_1,y_2,\ldots,y_n) \in C$
$y_0^2+y_1^2+\cdots+y_n^2=0$

$x+y \in D \overset{?}{\Leftrightarrow} (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n) \in C$
$(x_0+y_0)^2+(x_1+y_1)^2+\cdots+(x_n+y_n)^2=0$

$\left.\begin{array}{l}(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in C \\ (y_1,y_2,\ldots,y_n) \in C\end{array}\right\} \underset{C \text{ lineer}}{\Longrightarrow} (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n) \in C$

$(x_0+y_0)^2+(x_1+y_1)^2+\cdots+(x_n+y_n)^2 = x_0^2+2x_0y_0+y_0^2+x_1^2+2x_1y_1+y_1^2+\cdots$
$+x_n^2+2x_ny_n+y_n^2 = x_0^2+x_1^2+\cdots+x_n^2+y_0^2+y_1^2+\cdots+y_n^2+$
$2(x_0y_0+\cdots+x_ny_n) = 0+0+0 \qquad q=\underline{\underline{2^k}}$
$=0$

$\therefore x+y \in D$
mod 2 de olduğundan ikinci şarta bakmaya gerek yok.
$\therefore D$ lineer koddur

ii) $\forall\, x=(x_0,x_1,\ldots,x_n) \in C \Rightarrow x \in C^\perp$
$\Rightarrow x\cdot x=0 \Rightarrow x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=0$

$D=\{(x_0,x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{F}_q^{n+1} : (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in C,\ x_0^2=0\}$ olur

• $D \subseteq \mathbb{F}_q^{n+1}$

• $0 \in D \Rightarrow D \neq \emptyset$

- $\forall x, y \in D$ için $x+y \in D$ mi?

$x \in D \Rightarrow x = (x_0, x_1, \dots, x_n), \quad x_0^2 = 0, \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C$

$y \in D \Rightarrow y = (y_0, y_1, \dots, y_n), \quad y_0^2 = 0, \quad (y_1, y_2, \dots, y_n) \in C$

$$\left.\begin{array}{l} x+y = (x_0+y_0, \dots, x_n+y_n) \\ x_0^2 + y_0^2 = 0+0=0 \\ (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n) \in C \end{array}\right\} \Rightarrow x+y \in D$$

- Benzer şekilde $\forall x \in D$ ve $\forall \alpha \in F_q$ için

$$\alpha x \in D$$

olur.

$\therefore$ D lineer koddur.