Adı Soyadı :
No :
imza :

1	2	3	4	5	Toplam

OMÜ FEN FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ
2023-2024 BAHAR DÖNEMİ MAT 314 KOMPLEKS
FONKSİYONLAR TEORİSİNE GİRİŞ FİNAL SINAV SORULARI

1) (a) $\left[\frac{e}{2}(-1-i\sqrt{3})\right]^{3\pi i}$ ifadesinin esas değerinin $-e^{-4\pi^2}$ olduğunu gösteriniz.

(b) $w=f(z)=iz+i$ doğrusal dönüşümünün $\operatorname{Re} z \geq 1$ sağ yarı düzlemini $\operatorname{Im} z \geq 2$ üst yarı düzlemine dönüştürdüğünü gösteriniz.

2) (a) $z^4+z^2+1=0$ denkleminin köklerini bulunuz. ($z\in\mathbb{C}$)

(b) $\cos z = \frac{1}{2}$ denklemini çözünüz. ($z\in\mathbb{C}$)

3) $f(z)=\begin{cases} \dfrac{(\bar{z})^2}{z}, & z\neq 0 \\ 0, & z=0 \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor.

$f(z)$ fonksiyonunun $z=0$ noktasında Cauchy-Riemann denklemlerini sağladığını fakat $f'(0)$ türevinin mevcut olmadığını gösteriniz.

4) $f(z)=x^2+iy^2$ fonksiyonu veriliyor.

(a) $f(z)$ nin diferensiyellenebileceği en geniş kümeyi (adım adım açıklayarak) bulunuz.

(b) $f(z)$ nin analitik olduğu kümeyi bulunuz.

5) a) $u=xy$ b) $u=e^{x}\cos y$ ($u=u(x,y)$)

fonksiyonlarının harmonik olup olmadığını inceleyiniz. Eğer harmonik ise harmonik eşleniğini bulunuz.

<u>Not:</u> Süre 120 dakikadır.
Her soru 20 şer puandır.
Başarılar...

25.06.2024

MAT 314 KOMP. FONK. TEO. GİRİŞ FİNAL SINAV SORULARI ÇÖZÜMLERİ

1) a) $\left[\frac{e}{2}(-1-i\sqrt{3})\right]^{3\pi i} = e^{3\pi i \log\left(\frac{e}{2}(-1-i\sqrt{3})\right)}$

$= e^{3\pi i\left(1+\frac{4\pi}{3}i\right)} = e^{3\pi i - 4\pi^2} = e^{3\pi i}\cdot e^{-4\pi^2}$

$= (\underbrace{\cos 3\pi}_{-1} + i\underbrace{\sin 3\pi}_{0})\cdot e^{-4\pi^2} = -e^{-4\pi^2}$

b) $A = \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 1\}$, $z = x+iy \Rightarrow \operatorname{Re} z \geq 1$; $x\geq 1$, $y\in\mathbb{R}$

$w = f(z) = i(x+iy)+i = ix - y + i = -y + i(x+1)$

$w = u+iv = -y+i(x+1) \Rightarrow u = -y$, $v = x+1$

$y\in\mathbb{R}$ olduğundan $u\in\mathbb{R}$ dir. $x\geq 1 \Rightarrow x+1\geq 2 \Rightarrow v\geq 2$ olur.

$w = f(z) = u+iv$, $v = \operatorname{Im} w \geq 2$

$A' = \{u+iv : u\in\mathbb{R}, v\geq 2\}$

2) a) $z^4+z^2+1=0$, $z^2 = p$ olsun. $p^2+p+1=0$ olur.

$\Delta = b^2-4ac = 1-4 = -3$, $p_{1,2} = \frac{-1\mp\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1\mp i\sqrt{3}}{2}$

$p_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $p_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, $z^2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ olsun.

$z = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2}$, $w = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $|w| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

$\operatorname{Arg} w = \theta$, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, $\sin\theta = +\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\operatorname{Arg} w = \frac{2\pi}{3}$

$z_k = 1.\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)$, $k=0,1$

$= \cos\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right)$

$z_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \boxed{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$, $z_1 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \boxed{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$z^2 = p = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2}$, $w = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, $|w|=1$,

$\operatorname{Arg} w = \theta \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2}$, $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = -\frac{2\pi}{3}$

$z_k = 1\left(\cos\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)$ $k=0,1$

$= \cos\left(-\frac{\pi}{3}+k\pi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}+k\pi\right)$

$z_0 = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \boxed{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

2) b) $\cos z = \frac{1}{2} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \Rightarrow e^{iz}+\frac{1}{e^{iz}} = 1 \Rightarrow \frac{e^{2iz}+1}{e^{iz}} = 1$

$e^{2iz} - e^{iz} + 1 = 0$ $\qquad w = e^{iz}$ olsun. $w^2 - w + 1 = 0$

$\Delta = \sqrt{1-4} = \sqrt{-3} = i\sqrt{3}$, $w_{1,2} = \frac{1 \mp i\sqrt{3}}{2}$, $w_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $w_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

$w_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{iz} \Rightarrow iz_1 = \log\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$

$z_1 = \frac{1}{i}\log\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = -i\log\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$

$z_1 = -i\left[\ln\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right| + i\,\mathrm{Arg}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\right] = -i\left[\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\right]$

$= \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$e^{iz_2} = w_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow iz_2 = \log\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right), z_2 = -i\log\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$

$z_2 = -i\left[\ln 1 + i\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\right], k \in \mathbb{Z}$

$= -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ $\qquad \boxed{z_{1,2} = \mp\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$

3) $u(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $v(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3-3x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$u_x(0,0) = v_y(0,0)$, $u_y(0,0) = -v_x(0,0)$ gösterilmeli.

$$\left.\begin{aligned}
u_x(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{u(t,0)-u(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3}{t^2}-0}{t} = 1 \\
u_y(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{u(0,k)-u(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{\frac{0}{k^2}-0}{k} = 0 \\
v_x(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{v(t,0)-v(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{0}{t^2}-0}{t} = 0 \\
v_y(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{v(0,k)-v(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{\frac{k^3}{k^2}-0}{k} = 1
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned} &u_x(0,0) = 1 = v_y(0,0) \\ &u_y(0,0) = 0 = -v_x(0,0)\end{aligned}$$

Cauchy-Riemann denklemleri sağlanır.

$f'(0) = \lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{z\to 0}\frac{\frac{(\bar{z})^2}{z}-0}{z} = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2 = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x-iy)^2}{(x+iy)^2}$

x-ek. boyunca yaklaşılırsa $y=0$ olup, $f'(0) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x}\right)^2 = 1$

y-ek " " $x=0$ olup, $f'(0) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{-iy}{iy}\right)^2 = 1$

$y=x$ boyunca, $f'(0) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-ix}{x+ix}\right)^2 = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$ bulunur.

farklı limitler olduğundan $f'(0)$ yoktur.

4) a) • $f(z)$ nin tanım kümesi $\mathbb{C}$ dir. $D_0 = (\mathbb{C})^\circ = \mathbb{C}$

• $f(z)$ nin sürekli olduğu küme $D_1 = \mathbb{C}$

• $u(x,y) = x^2$, $v(x,y) = y^2$ olup,

$u_x = 2x$, $u_y = 0$, $v_x = 0$, $v_y = 2y \Rightarrow D_2 = \mathbb{C}$ de sürekli

• $u_x = v_y \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$

$u_y = -v_x \Rightarrow 0 = 0$

Cauchy-Rieman denklemleri $D_3 = \{x+iy : x = y,\ x,y \in \mathbb{R}\}$ kümesinde sağlanır.

$D = D_0 \cap D_1 \cap D_2 \cap D_3 = D_3 = \{x+iy : x = y,\ x,y \in \mathbb{R}\}$

türevlenebildiği kümedir.

b) Analitik olduğu küme $A = D^\circ = \left(\{x+iy : x = y,\ x,y \in \mathbb{R}\}\right)^\circ$
$= \phi$

$A = \phi$ olup, analitik olduğu küme yoktur.

5) a) $u(x,y) = xy$ b) $u(x,y) = e^x \cos y$

a) $u_x = y$, $u_y = x$, $u_{xx} = 0$, $u_{yy} = 0$ olup, $u_{xx} + u_{yy} = 0$

olduğundan u harmoniktir.

(b) Cauchy-Riemann denklemlerinden

$u_x = v_y \Rightarrow v_y = y \Rightarrow v = \int y\,dy = \frac{y^2}{2} + \varphi(x)$

$u_y = -v_x \Rightarrow x = \varphi'(x) \Rightarrow \varphi(x) = \frac{x^2}{2} + c$

$u(x,y) = xy$ nin harmonik eşleniği $v(x,y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + c$

b) $u = e^x \cos x$ $u_x = e^x \cos x - e^x \sin x$

$u_{xx} = e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x) = -2e^x \sin x$

$u_y = 0$, $u_{yy} = 0 \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = -2e^x \sin x \neq 0$

olup, u harmonik değildir.