

2024-2025 ÖĞRETİM YILI MAT 314 KOMP. FONK. TEO. GİRİŞ BÜTÜNLEME
SINAV SORULARI ÇÖZÜMLERİ

1. a) $\frac{(1+i\sqrt{3})^3(\sqrt{3}+i)}{(1+i)^2}$ ve $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{199}$ kompleks sayıların mutlak değerini ve bütün argümanlarını bulunuz. (10 puan)

$$z = \frac{(1+i\sqrt{3})^3(\sqrt{3}+i)}{(1+i)^2} \text{ için,}$$

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = \sqrt{3} + i, \quad z_3 = 1 + i \text{ olsun.}$$

$$|z_1| = \sqrt{1+3} = 2 \text{ olup, } \operatorname{Arg} z_1 = \theta_1 \text{ için } \cos \theta = 1/2, \sin \theta = \sqrt{3}/2 \text{ olduğundan } \theta_1 = \pi/3$$

$$|z_2| = \sqrt{3+1} = 2 \text{ olup, } \operatorname{Arg} z_2 = \theta_2 \text{ için } \cos \theta = \sqrt{3}/2, \sin \theta = 1/2 \text{ olduğundan } \theta_2 = \pi/6$$

$$|z_3| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \text{ olup, } \operatorname{Arg} z_3 = \theta_3 \text{ için } \cos \theta = 1/\sqrt{2}, \sin \theta = 1/\sqrt{2} \text{ olduğundan } \theta_3 = \pi/4$$

Buradan,

$$\begin{aligned} z &= \frac{z_1^3 z_2}{z_3^2} = \frac{\left[2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)\right]^3 \left[2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)\right]}{\left[\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right]^2} \\ &= \frac{8(\cos \pi + i \sin \pi) 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)}{2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)} = 8 \left[\cos \left(\pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &= 8 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \Rightarrow \operatorname{arg} z = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

b) $z^3 = 2 + 2i$ denkleminin çözümünü bulunuz. (5 puan)

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ olsun. } |z| = 1 \text{ ve } \operatorname{Arg} z = \theta \text{ için } \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \text{ olup } \theta = -\frac{\pi}{4} \text{ bulunur.}$$

$$z = 1 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \text{ yazılır.}$$

$$\begin{aligned} z^{199} &= 1^{199} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)^{199} = 1 \left(\cos \left(-\frac{199\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{199\pi}{4} \right) \right) \\ &= \cos \left(-49\pi - \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-49\pi - \frac{3\pi}{4} \right) = \cos \left(\pi - \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{3\pi}{4} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\text{bulunur. } Arg z^{199} = \frac{\pi}{4} \text{ ve } arg z^{199} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$c) w = \left(i e^{\frac{\pi}{2}} \right)^i \text{ olmak üzere } |w|, Arg w, arg w, Rew, Imw \text{ değerlerini bulunuz. (5 puan)}$$

$$w = \left(i e^{\frac{\pi}{2}} \right)^i = i^i e^{\frac{\pi}{2}i} \text{ olup}$$

$$\begin{aligned} i^i &= e^{i \log i} = e^{i(\ln|i| + i \arg(i))} = e^{i[\ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)]} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} \\ &= i^i e^{\frac{\pi}{2}i} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} e^{\frac{\pi}{2}i} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi} \end{aligned}$$

$$|w| = w \quad Arg w = 0 \quad arg w = 2k\pi \quad Rew = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi} \quad Imw = 0$$

$$2. a) \left| \frac{z-3}{z+3} \right| < 2 \text{ kümesini kompleks düzlemde gösteriniz. (5 puan)}$$

$$\left| \frac{z-3}{z+3} \right| < 2 \text{ için } z = x + iy \text{ o.ü}$$

$$\left| \frac{(x-3) + iy}{(x+3) + iy} \right| < 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{(x-3)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+3)^2 + y^2}} < 2$$

$$(x-3)^2 + y^2 < 4[(x+3)^2 + y^2]$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 < 4x^2 + 24x + 36 + 4y^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4x^2 - 24x - 36 - 4y^2 < 0$$

$$-3x^2 - 30x - 27 - 3y^2 < 0$$

$$x^2 + 10x + y^2 + 9 > 0$$

$$(x + 5)^2 + y^2 > 16$$

b) $e^{\text{Log}[\text{Log}(\text{Log}i)]}$ kompleks sayısını $a + bi$ şeklinde yazınız. **(5 puan)**

$$\text{Log}i = \ln|i| + i\text{Arg}(i) = 0 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Log}(\text{Log}i) = \text{Log}\left(\frac{\pi}{2}i\right) = \ln\left|\frac{\pi}{2}i\right| + i\text{Arg}\left(\frac{\pi}{2}i\right) = \ln\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}$$

$$e^{\text{Log}(\text{Log}(\text{Log}i))} = e^{\text{Log}\left(\ln\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}\right)} = \ln\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2} \text{ bulunur.}$$

3. $\lim_{z \rightarrow i} (z^2 + 1) = 0$ limitinin doğru olup olmadığını limit tanımını kullanarak gösteriniz.

(10 puan)

$\forall \varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $0 < |z - i| < \delta$ iken $|z^2 + 1| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulalım.

$$|z^2 + 1| = |z - i||z + i| \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

$$0 < |z - i| < \delta < 1 \text{ olsun. Buradan}$$

$$|z - i| < 1 \Rightarrow |z| < 2 \text{ olup}$$

$$|z^2 + 1| = |z - i||z + i| \leq |z - i|(|z| + |i|) = |z - i|(|z| + 1) < 3\delta$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{3} \text{ alınırsa } \delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\} \text{ bulunur. O halde } \lim_{z \rightarrow i} z^2 + 1 = 0' \text{ dır.}$$

4. $w = (1 - i)z + 1 - 2i$ dönüşümü altında

$z = -1 + i$ noktasının görüntüsünü ve $\text{Im}(z) > 1$ yarı düzlemin görüntüsünü bulunuz. **(15 puan)**

a) $w = (1 - i)(-1 + i) + 1 - 2i = -1 + i + i + 1 + 1 - 2i = 1$ bulunur.

b) $w = (1 - i)z + 1 - 2i$ eşitliğinden z çekilerek $z = \frac{w-1+2i}{1-i}$ bulunur. Burada $z = x + iy, w = u + iv$ yazılarak

$$x + iy = \frac{u + iv - 1 + 2i}{(1 - i)(1 + i)}$$

ve böylece

$$\operatorname{Re}(z) = x = \frac{u - v - 3}{2}, \operatorname{Im}(z) = y = \frac{u + v + 1}{2}$$

elde edilir.

Bu durumda $\operatorname{Im}(z) > 1$ yarı düzleminin görüntüsü,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(z) = \frac{u + v + 1}{2} > 1 &\Rightarrow u + v - 1 > 0 \\ &\Rightarrow u + v > 1 \end{aligned}$$

yarı düzlemi olarak bulunur.

5. $f(z) = e^z$ fonksiyonunun $z_0 = 0$ noktasında sürekli olup olmadığını gösteriniz. (10 puan)

$\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $|z - 0| < \delta$ iken $|f(z) - f(0)| = |e^z - 1| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulalım. $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \text{ ise } |x| < \delta \text{ ve } |y| < \delta \text{ olur.}$$

$$|e^z - 1| \leq |e^z| + 1 = |e^{x+iy}| + 1 = |e^x| |e^{iy}| = |e^x| |\cos y + i \sin y| + 1$$

$$= |e^x| |1| + 1 \leq |e^x| + |e^x| = 2|e^x|$$

$\delta = \ln \frac{\varepsilon}{2}$ alınırsa $|e^z - 1| \leq 2|e^x| < 2e^\delta = \varepsilon$ bulunur. Bu halde $z_0 = 0$ noktasında fonksiyon sürekli dir.

6. $f(z) = \frac{(x-1)-iy}{(x-1)^2+y^2}$ fonksiyonunun varsa diferansiyellenebileceği en geniş kümeyi

yazınız. Ayrıca analitik olduğu kümeyi bulunuz. **(15 puan)**

$f(z) = \frac{(x-1)-iy}{(x-1)^2+y^2}$ fonksiyonun tanım kümesi $T = \mathbb{C} \setminus \{(1,0)\}$ old. $D_0 = \mathbb{C} \setminus \{(1,0)\}$ 'dir.

$f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{C}'$ de her noktada sürekli olduğundan $D_1 = \mathbb{C} \setminus \{(1,0)\}'$ dir.

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{(x-1)}{(x-1)^2+y^2}, \quad v(x,y) = \frac{-y}{(x-1)^2+y^2} \\ u_x &= \frac{-2(x-1)^2}{[(x-1)^2+y^2]^2} \\ u_y &= \frac{-2y(x-1)}{[(x-1)^2+y^2]^2} \\ v_x &= \frac{2y(x-1)}{[(x-1)^2+y^2]^2} \\ v_y &= \frac{-2(x-1)^2}{[(x-1)^2+y^2]^2} \end{aligned}$$

Kısmi türevleri $D_2 = \mathbb{C} \setminus \{(1,0)\}$ kümesinde var ve sürekli

$u_x = v_y$ ve $u_y = -v_x$ olup $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ denklemleri de $D_3 = \mathbb{C} \setminus \{(1,0)\}$ 'de sağlanır.

O halde $D = D_0 \cap D_1 \cap D_3 = \mathbb{C} \setminus \{(1,0)\}$ olur. Buna göre $f(z)'$ nin bu kümedeki türevi

$$f'(z) = u_x + iv_x = \frac{-2(x-1)^2}{[(x-1)^2+y^2]^2} + i \frac{2y(x-1)}{[(x-1)^2+y^2]^2}$$

$A = (\mathbb{C} \setminus \{(1,0)\})^\circ = \mathbb{C} \setminus \{(1,0)\}$ kümesinde analitiktir.

7. $u = \sin x \cosh y$ fonksiyonun harmonik olup olmadığını araştırınız. Harmonik ise harmonik eşleniğini bulunuz. **(20 puan)**

$u_x = \cos x \cosh y, v_y = \sin x \sinh y$ olup

$u_{xx} = -\sin x \cosh y, u_{yy} = \sin x \cosh y$ u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy} fonksiyonları var ve süreklidir.

Ayrıca $u_{xx} + u_{yy} = -\sin x \cosh y + \sin x \cosh y = 0$ olduğundan $u \in \mathbb{R}^2$ de harmonik bir

fonksiyondur. $f = u + iv$ o.ş f analitik fonksiyonu var olsun v fonksiyonunu bulalım.

$u_x = v_y \Rightarrow v_x = \cos x \cosh y = v_y \Rightarrow v = \cos \int x \cosh y dy \Rightarrow v = \cos x \sinh y + Q(x)$

olur. $u_y = -v_x \Rightarrow \sin x \sinh y = \sin x \sinh y + Q'(x) \Rightarrow Q'(x) = 0 \Rightarrow Q(x) = c$ olup.
 $v = \cos x \sinh y + c$, u nun harmonik eşleniğidir.

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR