

Adı-Soyadı:

Numarası:

1	2	3	4	5	6	Toplam Puan

MAT314 KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİNE GİRİŞ DERSİ
FİNAL SINAV SORULARI

1. $z_1 = (-1 + i)^{3+i}$, $z_2 = (1 - i)^{64}$ ve $z_3 = \cos(1 + i)$ kompleks sayılarını $a + ib$ şeklinde yazınız. (20 Puan)

2. a) $x = 3$ doğrusunun $f(z) = iz + \bar{z}$ kompleks dönüşümü altındaki görüntüsünü bulunuz ve çiziniz.

b) $0 \leq x \leq \ln 2$, $-\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ dikdörtgeninin $f(z) = e^z$ dönüşümü altındaki görüntüsünü bulunuz ve çiziniz. (20 Puan)

3. Süreklilik tanımını yazınız. Tanımı kullanarak

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z \cdot \operatorname{Re}(z)}{|z|}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $z = 0$ noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.

(15 Puan)

4. $f(z) = \frac{\operatorname{Log}(3z-2+4i)}{z^3+1}$ fonksiyonunun türevlenebilir olduğu kümeyi ve bu küme üzerindeki $f'(z)$ türevini bulunuz. (15 Puan)

5. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|}{\sin z}$ limitinin var olup olmadığını gösteriniz.

(15 Puan)

6. $f(z) = x^5 + iy^5$ fonksiyonunun varsa diferansiyellenebileceği en geniş kümeyi bulunuz. (15 Puan)

Ders Sorumlusu: Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

Süre: 100 dakikadır.

Tarih: 11.06.2026

Başarılar dilerim.

ÇÖZÜMLER

1. $z_1 = (-1 + i)^{3+i} = e^{(3+i)\text{Log}(-1+i)}$.
 $|-1 + i| = \sqrt{2}$, $\text{Arg}(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}$ olduğundan $\text{Log}(-1 + i) = \ln \sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}$ elde edilir.

$$\begin{aligned} (3+i) \left(\ln \sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4} \right) &= 3 \ln \sqrt{2} + i\frac{9\pi}{4} + i \ln \sqrt{2} - \frac{3\pi}{4} \\ &= \left(3 \ln \sqrt{2} - \frac{3\pi}{4} \right) + i \left(\frac{9\pi}{4} + \ln \sqrt{2} \right) \end{aligned}$$

Böylece:

$$z_1 = e^{3 \ln \sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}} \left[\cos \left(\frac{9\pi}{4} + \ln \sqrt{2} \right) + i \sin \left(\frac{9\pi}{4} + \ln \sqrt{2} \right) \right]$$

$$z_2 = (1 - i)^{64} \text{ için } |1 - i| = \sqrt{2} \text{ ve } \theta = \text{Arg}(1 - i) = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned} (1 - i)^{64} &= \left(\sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] \right)^{64} \\ &= (\sqrt{2})^{64} \left[\cos \left(-\frac{64\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{64\pi}{4} \right) \right] \\ &= 2^{32} [\cos(-16\pi) + i \sin(-16\pi)] = 2^{32} (1 + i \cdot 0) = 2^{32} \end{aligned}$$

Buradan $a = 2^{32}$ ve $b = 0$ bulunur.

$$z_3 = \cos(1 + i) = \frac{e^{i(1+i)} + e^{-i(1+i)}}{2} = \frac{e^{-1+i} + e^{1-i}}{2}.$$

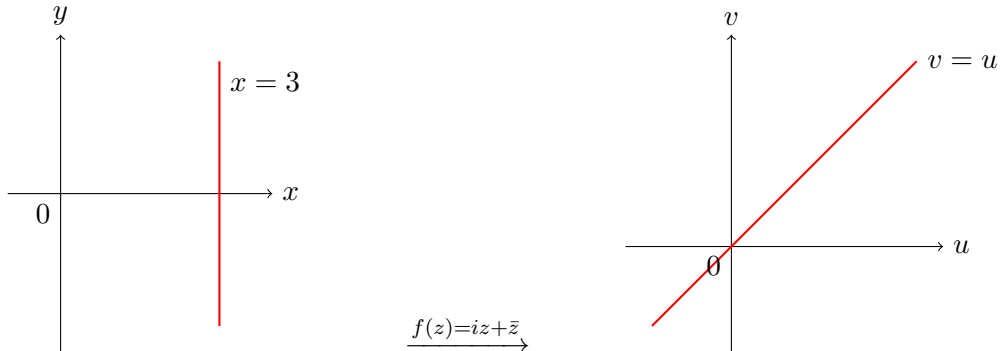
$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{1}{2} [e^{-1}(\cos 1 + i \sin 1) + e^1(\cos(-1) + i \sin(-1))] \\ &= \frac{1}{2} [e^{-1}(\cos 1 + i \sin 1) + e^1(\cos 1 - i \sin 1)] \\ &= \cos 1 \left(\frac{e^1 + e^{-1}}{2} \right) - i \sin 1 \left(\frac{e^1 - e^{-1}}{2} \right) = \cos(1) \cosh(1) - i \sin(1) \sinh(1) \end{aligned}$$

Buradan $a = \cos(1) \cosh(1)$ ve $b = -\sin(1) \sinh(1)$ bulunur.

2. a) $z = 3 + iy$, $y \in \mathbb{R}$. Dönüşüm altında:

$$\begin{aligned} w = u + iv &= f(3 + iy) = i(3 + iy) + \overline{(3 + iy)} \\ &= 3i - y + 3 - iy = (-y + 3) + i(3 - y) \end{aligned}$$

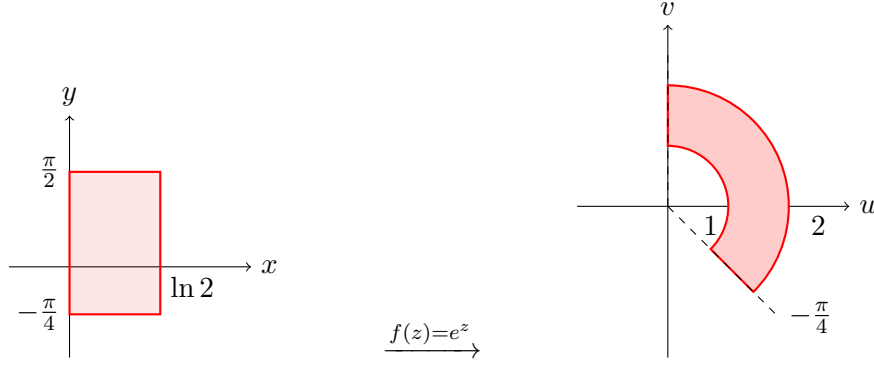
Buradan $u = -y + 3$ ve $v = 3 - y$ elde edilir. Taraf tarafa incelendiğinde $v = u$ doğrusu bulunur.



b) $f(z) = e^z$ için $w = e^z$ diyelim. $|w| = |e^z| = e^x$ ve $\text{Arg}(w) = \text{Im}(z) = y$ olur. Eşitsizlikleri yerine yazarsak:

$$0 \leq x \leq \ln 2 \implies e^0 \leq |w| \leq e^{\ln 2} \implies 1 \leq |w| \leq 2$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \implies -\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(w) \leq \frac{\pi}{2}$$



3. Süreklilik tanımı: $f(z)$ fonksiyonunun $z = z_0$ noktasında sürekli olması için; $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde, $\exists \delta > 0$ öyle ki $|z - z_0| < \delta$ iken $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ şartı sağlanmalıdır.

Keyfi $\varepsilon > 0$ alalım. $\delta = \varepsilon$ seçilirse $|z - 0| = |z| < \delta$ iken;

$$|f(z) - f(0)| = \left| \frac{z \cdot \text{Re}(z)}{|z|} - 0 \right| = \frac{|z| \cdot |\text{Re}(z)|}{|z|} = |\text{Re}(z)|$$

Her $z \in \mathbb{C}$ için $|\text{Re}(z)| \leq |z|$ olduğu bilindiğinden:

$$|f(z) - f(0)| = |\text{Re}(z)| \leq |z| < \delta = \varepsilon$$

olur. Böylece tanım gereği $f(z)$ fonksiyonu $z = 0$ noktasında sürekli dir.

4. Fonksiyonu tanımsız yapan noktalar öncelikle paydanın sıfır olduğu noktalardır: $z^3 + 1 = 0 \implies z^3 = -1 = \cos(\pi) + i \sin(\pi)$. Kökler:

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_1 = -1, \quad z_2 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bu noktalarda fonksiyon türevlenemez.

Ayrıca pay kısmındaki $\text{Log}(3z - 2 + 4i)$ fonksiyonu; $\text{Re}(3z - 2 + 4i) \leq 0$ ve $\text{Im}(3z - 2 + 4i) = 0$ iken türevlenemez.

$$3z - 2 + 4i = 3(x + iy) - 2 + 4i = (3x - 2) + i(3y + 4)$$

$$3x - 2 \leq 0 \implies x \leq \frac{2}{3} \text{ ve } 3y + 4 = 0 \implies y = -\frac{4}{3}.$$

Türevlenebildiği en geniş küme:

$$A = \mathbb{C} \setminus \left(\{z_0, z_1, z_2\} \cup \left\{ z = x + iy \mid x \leq \frac{2}{3}, y = -\frac{4}{3} \right\} \right)$$

Bu küme üzerindeki türevi ise bölümün türevi kuralı ile:

$$f'(z) = \frac{\frac{3}{3z-2+4i}(z^3+1) - 3z^2 \text{Log}(3z-2+4i)}{(z^3+1)^2}$$

şeklinde bulunur.

5. $z_0 = 0$ noktası, $f(z) = \frac{|z|}{\sin z}$ fonksiyonunun tanım kümesi olan $\mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin bir yığılma noktasıdır.

Eğer limit mevcutsa, z 'nin 0'a hangi yoldan yaklaştığından bağımsız olarak hep aynı değeri vermelidir. Orijine gerçel eksen (x-ekseni) boyunca yaklaşalım ($y = 0$). Bu durumda $z = x$ olur ve limite sağdan ile soldan ayrı ayrı bakmamız gerekir:

Sağdan yaklaşırken ($x \rightarrow 0^+$): $x > 0$ olduğu için $|z| = |x| = x$ olur.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$$

Soldan yaklaşırken ($x \rightarrow 0^-$): $x < 0$ olduğu için $|z| = |x| = -x$ olur.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{\sin x} = -1$$

$1 \neq -1$ olduğundan sağdan ve soldan yaklaşımlarda limit değerleri farklıdır. Dolayısıyla $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|}{\sin z}$ **limiti yoktur.**

6. $f(z) = x^5 + iy^5$ fonksiyonunun tanım kümesi $T = \mathbb{C}$ olup polinom tipli ifadeler içerdiğinden her noktada süreklidir.

$$\begin{aligned} u(x, y) = x^5 &\implies u_x = 5x^4, \quad u_y = 0 \\ v(x, y) = y^5 &\implies v_x = 0, \quad v_y = 5y^4 \end{aligned}$$

Kısmi türevler mevcuttur ve süreklidir. Türevlenebilirlik için Cauchy-Riemann denklemlerinin sağlanması zorunludur:

$$\begin{aligned} u_y = -v_x &\implies 0 = 0 \\ u_x = v_y &\implies 5x^4 = 5y^4 \implies x^4 = y^4 \implies x = y \text{ veya } x = -y \end{aligned}$$

Cauchy-Riemann denklemleri yalnızca bu doğrular üzerinde sağlandığı için fonksiyonun diferansiyellenebileceği en geniş küme:

$$D = \{z = x + iy \mid y = x \text{ veya } y = -x\}$$

Bu küme üzerindeki türevi ise:

$$f'(z) = u_x + iv_x = 5x^4 + i0 = 5x^4$$

olarak bulunur.