

MAT314 – Kompleks Fonksiyonlar Teorisine Giriş
Bütünleme Sınavı – Cevap Anahtarı

Soru 1

Aşağıdaki kompleks sayıları $a + ib$ biçiminde yazınız.

a) $e^{\text{Log}(\text{Log}(\text{Log } i))}$

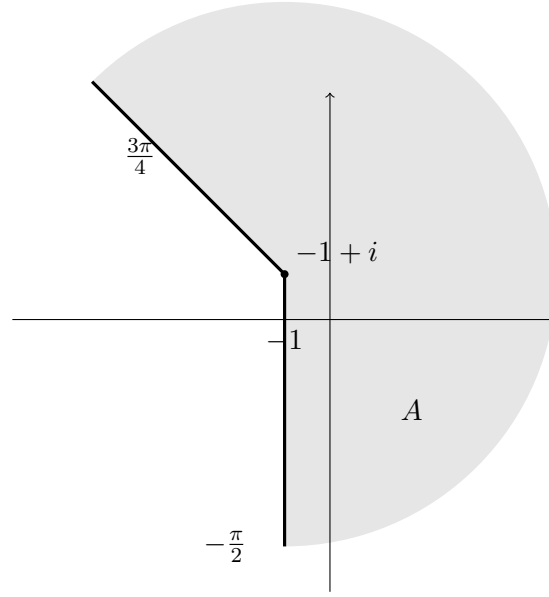
$$\begin{aligned} e^{\text{Log}(\text{Log}(\text{Log } i))} &= e^{\text{Log}(\text{Log}\{\ln|i|+i \text{Arg}(i)\})} = e^{\text{Log}(\text{Log}(i\frac{\pi}{2}))} \\ &= e^{\text{Log}(\ln|i\frac{\pi}{2}|+i \text{Arg}(i\frac{\pi}{2}))} = e^{\text{Log}\{\ln\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}\}} \\ &= e^{\ln|\ln\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}|+i \text{Arg}(\ln\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2})} \\ &= e^{\ln\sqrt{\ln^2\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}} \cdot e^{i \text{arg}(\ln\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2})}} \\ &= \sqrt{\left(\ln\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{4}} \cos\left(\text{arg}\left(\ln\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &\quad + i \sqrt{\left(\ln\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{4}} \sin\left(\text{arg}\left(\ln\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

b) $\cos(i \text{arg}(1 + i))$

$$\cos(i \text{arg}(1 + i)) = \cos\left(i\frac{\pi}{4}\right) = \frac{e^{i(i\pi/4)} + e^{-i(i\pi/4)}}{2} = \frac{e^{-\pi/4} + e^{\pi/4}}{2} \in \mathbb{R}.$$

Soru 2

$A = \left\{ z : -\frac{\pi}{2} \leq \text{arg}(z + 1 - i) \leq \frac{3\pi}{4} \right\}$ kümesini çiziniz. A bölge midir?



2. soru: A açık değildir. Dolayısıyla bölge değildir.

Soru 3

$\cos z = \frac{1}{2}$ denklemini çözünüz. $[0, 2\pi]$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 1 \Rightarrow e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}} = 1 \Rightarrow e^{2iz} - e^{iz} + 1 = 0.$$

$e^{iz} = t$ dersek:

$$t^2 - t + 1 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{1 \mp \sqrt{3}i}{2}.$$

$$e^{iz_{1,2}} = \frac{1 \mp \sqrt{3}i}{2} \Rightarrow iz_{1,2} = \log\left(\frac{1 \mp \sqrt{3}i}{2}\right) \Rightarrow z_{1,2} = -i \log\left(\frac{1 \mp \sqrt{3}i}{2}\right),$$

$$z_1 = -i \log\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right), \quad z_2 = -i \log\left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right).$$

$$\log\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right) = \log\left(\frac{\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}}{\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}}\right) = \log\left(\frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$= \log\left(\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}\right) = -\log\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$z_{1,2} = -i\omega_{1,2}, \quad \omega_1 = \log\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right),$$

$$\omega_2 = \log\left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right) = -\log\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = -i\left[\mp \log\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\right] \Rightarrow z_{1,2} = \pm i \log\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right).$$

$\log z = \log |z| + i \arg z$ ise $\left(\cos \theta = \frac{1}{2}, \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$:

$$\log\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right) = \log\left|\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right| + i \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \log 1 + i \cdot \frac{\pi}{3} = i\frac{\pi}{3}.$$

$$z_{1,2} = \pm i\left(i\frac{\pi}{3}\right) = \mp \frac{\pi}{3}.$$

Soru 4

a) **Limit tanımını kullanarak** $\lim_{z \rightarrow 3+4i} |z| = 5$.

$\forall \varepsilon > 0, |z - (3 + 4i)| < \delta$ iken $\varepsilon > |5 - |z||$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulmalıyız.

$$||z| - |3 + 4i|| = ||z| - 5| \leq |z - (3 + 4i)| = |(3 + 4i) - z| < \delta.$$

$\delta = \varepsilon$ seçilirse istenen elde edilir.

b) $\lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{\cos 2z}{\cosh(iz) + i \sinh(iz)}$.

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{\cos 2z}{\cosh(iz) + i \sinh(iz)} &= \lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{\cos 2z}{\cos z - \sin z} = \lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{\cos^2 z - \sin^2 z}{\cos z - \sin z} \\ &= \lim_{z \rightarrow \pi/4} (\cos z + \sin z) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Soru 5

$f(z) = e^z$ fonksiyonunun $z = 0$ noktasında sürekli olup olmadığını inceleyiniz.

$\forall \varepsilon > 0, |z - 0| < \delta$ iken $|f(z) - f(0)| = |e^z - 1| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulmalıyız.

$z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, |z| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ iken $|x| < \delta, |y| < \delta$.

$|e^z - 1| \leq |e^z| + 1 = |e^x| \cdot |e^{iy}| + 1 = |e^x| + 1 = e^x + 1 \leq e^{|x|} + e^{|x|} = 2e^{|x|} < \varepsilon$ olsun. $\delta = ?$

$\delta = \ln \frac{\varepsilon}{2}$ alınırsa

$$|e^z - 1| \leq 2e^{|x|} < 2e^\delta = \varepsilon$$

bulunur. O hâlde $f, z = 0$ noktasında sürekli dir.

Soru 6

$f(z) = \frac{(x-1) - iy}{(x-1)^2 + y^2}$ fonksiyonunun türevlenebileceği en geniş kümeyi bulunuz.

Çözüm: $f(z)$ 'nin tanım kümesi $T = \mathbb{C} - \{(1, 0)\}$ olur. $D_0 = \mathbb{C} - \{(1, 0)\}$.

$f(z)$ 'nin sürekli olduğu küme $D_1 = \mathbb{C} - \{(1, 0)\}$ dir.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}, & v(x, y) &= -\frac{y}{(x-1)^2 + y^2}. \\ u_x &= -\frac{2(x-1)^2}{[(x-1)^2 + y^2]^2}, & u_y &= -\frac{2y(x-1)}{[(x-1)^2 + y^2]^2}, \\ v_x &= \frac{2y(x-1)}{[(x-1)^2 + y^2]^2}, & v_y &= -\frac{(x-1)^2 + y^2}{[(x-1)^2 + y^2]^2}. \end{aligned}$$

Kısmi türevleri $D_2 = \mathbb{C} - \{(1, 0)\}$ da var ve süreklidir. $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ olup Cauchy–Riemann denklemlerini $D_3 = \mathbb{C} - \{(1, 0)\}$ da sağlar.

$$D = D_0 \cap D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \mathbb{C} - \{(1, 0)\}$$

f 'nin türevlenebilir olduğu kümedir. Bu kümedeki türevi

$$f'(z) = u_x + i v_x = -\frac{2(x-1)^2}{[(x-1)^2 + y^2]^2} + i \frac{2y(x-1)}{[(x-1)^2 + y^2]^2}$$

olarak bulunur.

Soru 7

$$f(z) = \begin{cases} \frac{2x^3 - y^3}{2x^2 + y^2} + i \frac{2x^3 + y^3}{2x^2 + y^2}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

$z \neq 0$ için $u = \frac{2x^3 - y^3}{2x^2 + y^2}$, $v = \frac{2x^3 + y^3}{2x^2 + y^2}$; $z = 0$ için $u = 0$ ve $v = 0$.

a) $z_0 = 0$ noktasında Cauchy–Riemann denklemleri sağlanır.

Reel değişkenli fonksiyonlardaki kısmi türevin tanımı kullanılarak:

$$u_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h, 0) - u(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2h^3}{2h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1,$$

$$u_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(0, h) - u(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1,$$

ve benzer şekilde,

$$v_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(h, 0) - v(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2h^3}{2h^2} - 0}{h} = 1,$$

$$v_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(0, h) - v(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = 1$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $z_0 = 0$ noktasında

$$u_x(0, 0) = 1 = v_y(0, 0), \quad u_y(0, 0) = -1 = -v_x(0, 0)$$

ve C-R denklemleri sağlanır.

b) $z_0 = 0$ noktasında f diferensiyellenemez.

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z}.$$

Limitin olmadığını göstermeliyiz. **x -ekseni boyunca** ($y = 0$):

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x^3}{2x^2} + i\frac{2x^3}{2x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + ix}{x} = 1 + i.$$

y -ekseni boyunca ($x = 0$):

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\frac{y^3}{y^2} + i\frac{y^3}{y^2}}{iy} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y + iy}{iy} = 1 + i.$$

$y = x$ doğrusu boyunca:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3x^2} + i\frac{3x^3}{3x^2}}{x(1+i)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{3} + ix}{x(1+i)} = \frac{\frac{1}{3} + i}{1+i} \\ &= \frac{1+3i}{3+3i} \cdot \frac{3-3i}{3-3i} = \frac{3+9i-3i-9i^2}{9+9} = \frac{12}{18} + i\frac{6}{18} = \frac{2}{3} + i\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$z_0 = 0$ noktasına farklı yönlerden yaklaştığımızda farklı değerler bulduğumuzdan, verilen $f(z)$ fonksiyonu $z_0 = 0$ noktasında diferensiyellenemez.