Adı soyadı :
No :
imza :

1	2	3	4	5	Toplam

OMÜ FEN FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ
2023-2024 BAHAR MAT 314 KOMP. FONK. TEO. GİRİŞ
BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) a) Kutupsal gösterimden yararlanarak $z^2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ denkleminin farklı bütün köklerini bulunuz.

b) $w = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$ olmak üzere $|w|$, $\arg w$, $\operatorname{Arg} w$, $\operatorname{Re} w$, $\operatorname{Im} w$ değerlerini bulunuz.

2) a) $\lim\limits_{z\to i} (z^2+1) = 0$ limitinin doğru olduğunu limit tanımını kullanarak gösteriniz. (ε, δ lı tanım

b) Eşlenik ve modül özelliklerini kullanarak $|(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-i)| = \sqrt{3}\,|2z+5|$ olduğunu gösteriniz.

3) $f(z) = e^{e^z}$ fonksiyonu veriliyor. ($z \in \mathbb{C}$)

a) $f(z)$ yi $u(x,y) + i\,v(x,y)$ şeklinde yazınız.

b) $f(z)$ nin Cauchy-Riemann denklemlerini sağlayıp sağlamadığını inceleyiniz.

4) a) $f(z) = \operatorname{Arg}(z+1)$ fonksiyonunun sürekli olduğu noktaların kümesini bulunuz.

b) $g(z) = \operatorname{Log}(z+1)$ fonksiyonunun diferensiyellenebildiği noktaların kümesini ve analitik olduğu kümeyi bulunuz.

5) $u(x,y) = x^2 - y^2$ fonksiyonunun harmonik olduğunu gösteriniz ve harmonik eşleniğini bulunuz. Buna karşılık gelen $f(z)$ fonksiyonunu bulunuz.

Not: Süre 110 dakikadır. 18.07.2024
Her soru eşit puanlıdır.
Başarılar..

18.07.2024

MAT314 KOMP. FONK. TEO. BÜTÜNLEME ÇÖZÜMLER

1 a) $b = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $z_k = \sqrt{|b|}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{2} + i\sin\frac{2k\pi+\theta}{2}\right)$

$|b| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$, $\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{1}{2}\\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$ veya

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

$z_k = \sqrt{1}\cdot\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{2}\right)$

$z_0 = \cos\left(\frac{-\frac{\pi}{3}+0}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{3}+0}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$

$z_1 = \cos\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi}{2} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} =$

$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

b) $w = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i} = e^{2i\left\{\ln\left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right| + i\arg\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) + 2k\pi i\right\}}$

$= e^{2i\left\{\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right\}} = e^{-2\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}$

$\in \mathbb{R}$ old.

$|w| = w$; $\operatorname{Arg} w = 0$; $\arg w = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

$\operatorname{Re} w = e^{-2(\pi/4 + 2k\pi)}$, $\operatorname{Im} w = 0$

2 a) $\varepsilon > 0$ verilsin. $\exists\, \delta = \ldots$:

$0 < |z-i| < \delta$ iken $|f(z) - 0| = |z^2+1| = |z+i||z-i| < \varepsilon$

olmalı.

$|z-i| < \delta < 1 \Rightarrow |z-i| < 1 \Rightarrow \big||z| - |i|\big| \le |z-i| < 1$

$\Rightarrow |z| - 1 < 1 \Rightarrow |z| < 2$,

$|z+i| \le |z| + 1 < 2 + 1 = 3$

$\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{3}, 1\right\}$ seçilirse $0 < |z-i| < 1$ iken

$|f(z) - 0| = |z^2+1| = |z+i||z-i| < 3\cdot\delta < \varepsilon$

olur.

CamScanner ile tarandı

② b) $|(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-i)| = |2\bar{z}+5||\sqrt{2}-i|$

$= |\overline{2z+5}| \cdot \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \cdot |2z+5|$

③ $z = x+iy$

a) $e^{e^z} = e^{e^{x+iy}} = e^{e^x\cos y + ie^x\sin y}$

$= e^{e^x\cos y} \cdot \cos(e^x\sin y) + i\left(e^{e^x\cos y} \cdot \sin(e^x\sin y)\right)$

$u(x,y) = e^{e^x\cos y} \cdot \cos(e^x\sin y)$

$v(x,y) = e^{e^x\cos y} \cdot \sin(e^x\sin y)$ $\qquad f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ol.

b) $\boxed{u_x = e^x e^{e^x\cos y} \cdot \cos(y + e^x\sin y)}$

$u_y = -e^x\sin y\, e^{e^x\cos y} \cdot \cos(e^x\sin y) - e^{e^x\cos y} \cdot \sin(e^x\sin y)\cos y$

$v_y = -e^x\sin y\, e^{e^x\cos y} \cdot \sin(e^x\sin y) + e^{e^x\cos y} \cdot \cos(e^x\sin y)\, e^x\cos y$

$\boxed{v_y = e^x \cdot e^{e^x\cos y} \cdot \cos(y + e^x\sin y)}$

$\boxed{v_x = e^x e^{e^x\cos y} \cdot \sin(y + e^x\sin y)}$

$u_x = v_y$, $\quad u_y = -v_x$ olur.

④ a) $f(z) = \mathrm{Arg}(z+1)$ $\quad f$ nin sürekli olduğu noktaların kümesi $S_f = \mathbb{C} - \{x+iy : x+1 \le 0, y=0\}$.
(nedeni derste açıklandığı gibi)

b) D_g türev kümesi adım adım açıklanarak
$D_g = \mathbb{C} - \{x+iy : x \le -1, y=0\}$ bulunur.

analitik olduğu $A = (D_g)^\circ = D_g = \mathbb{C} - \{x+iy : x \le -1, y=0\}$ dır.

$g(z) = \mathrm{Log}(z+1) = \ln|z+1| + i\,\mathrm{Arg}(z+1)$

(5) $u(x,y) = x^2 - y^2$

$u_x = 2x, \quad u_{xx} = 2, \quad u_y = -2y, \quad u_{yy} = -2$

$u_{xx} + u_{yy} = 2 + (-2) = 0$ yani u harmonik.

$u_x = v_y$ olacağından $v_y = 2x \Rightarrow v = \int (2x)\,dy + Q(x)$

$v = 2xy + Q(x) \quad \ldots (1)$

Şimdi $Q(x)$ i bulalım:

$v_x = -u_y = -(-2y) = 2y \qquad v_x = 2y$

$u_y = -2y$ ve (1) den $v_x = 2y + Q'(x)$

$v_x = -u_y \Rightarrow 2y + Q'(x) = 2y \Rightarrow Q'(x) = 0 \Rightarrow Q(x) = c$ = sabit

(1) den, $\boxed{v(x,y) = 2xy + c}$ harmonik eşleniği olur.

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) = x^2 - y^2 + i\,2xy + ic$

$= (x+iy)^2 + ic = z^2 + ic \qquad \boxed{f(z) = z^2 + ic}$