2023-2024 Eğitim Öğretim Yılı, MAT 311 Kısmi Diferansiyel Denklemler I, Arasınav

Sıra no: Numara: İsim-Soyisim: **3/12/2023**

SORULAR

1. $u_x + (\cos x)u_y + u = xy$ denklemini çözünüz.
2. $(y-u)u_x + (u-x)u_y = x - y$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.
3. $F(x, y, u, p, q) = 0$ denklemi için Lagrange-Charpit sistemini yazınız.
4. $pq + p + q = 0$ denkleminin tam integralini bulunuz.

Herbir soru 25 puandır. Sınav süresi 90 dakikadır. Süre bittikten sonra teslim edilen cevaplar kabul edilmeyecektir. Ek kağıt verilmeyecektir. Başarılar dilerim.

1) $a=1,\ b=\cos x,\ c=1,\ d=xy$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} = \cos x \to dy = \cos x\, dx \to y = \sin x + c_1$$

$$\boxed{\eta = \psi(x,y) = c_1 = y - \sin x}$$
$$\boxed{\xi = x}$$ 10

$$\to J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\cos x & 1 \end{vmatrix} = 1 + \cos x \neq 0$$

$$u_\xi(a\xi_x + b\xi_y) + cu = d \to u_\xi + u = xy \to \boxed{u_\xi + u = \xi(\eta + \sin\xi)}$$ 5

$$u = e^{-\int d\xi}\left[\int e^{\int d\xi}\xi(\eta+\sin\xi)d\xi + g(\eta)\right] = e^{-\xi}\left[\eta\int e^{\xi}\xi d\xi + \int e^{\xi}\xi\sin\xi d\xi + g(\eta)\right]$$

$$= e^{-\xi}\left[\eta e^{\xi}(\xi-1) + \xi\left(-\frac{e^{\xi}}{2}\cos\xi + \frac{e^{\xi}}{2}\sin\xi\right) + \frac{1}{2}e^{\xi}\cos\xi + g(\eta)\right]$$

$$u = \eta(\xi-1) + \frac{\xi}{2}(\sin\xi - \cos\xi) + \frac{1}{2}\cos\xi + g(\eta)e^{-\xi}$$

$$\boxed{u = (y-\sin x)(x-1) + \frac{x-1}{2}(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}\cos x + g(y-\sin x)e^{-x}}$$ 10

2) $$\frac{dx}{y-u} = \frac{dy}{u-x} = \frac{du}{x-y} \to \frac{dx+dy+du}{0} \to dx+dy+du = 0$$

10 $$\boxed{c_1 = x+y+u = w(x,y,u)}$$

$$\frac{x\,dx + y\,dy + u\,du}{x(y-u)+y(u-x)+u(x-y)} = \frac{x\,dx+y\,dy+u\,du}{0} \to x\,dx + y\,dy + u\,du = 0$$

$$\boxed{c_2 = x^2+y^2+u^2 = v(x,y,u)}$$ 10

$$\boxed{F(x+y+u,\ x^2+y^2+u^2) = 0}$$ 5

3) $$\frac{dp}{F_x + pF_u} = \frac{dq}{F_y + qF_u} = \frac{du}{-pF_p - qF_q} = \frac{dx}{-F_p} = \frac{dy}{-F_q} = \frac{dG}{0}$$

4) $pq + p + q = 0$

$dp = 0 \to p = a \to aq + a + q = 0 \to q(a+1) = -a \to q = -\frac{a}{a+1}$

$du = p\,dx + q\,dy = a\,dx - \frac{a}{a+1}\,dy \to \boxed{u = ax - \frac{a}{a+1}y + b}$

veya $\boxed{(a+1)u = a(a+1)x - ay + b_1}$