Ad-soyad : Cevap Anahtarı

Numara :

Lineer Cebir II Ara Sınav Soruları **27.05.2024**

NOT : Sorularda belirtilen yöntemlerden başka yöntemlerle yapılan çözümler kabul edilmeyecektir. Çözümlerinizi ayrıntılı olarak yazınız. Süre 90 dakikadır. Başarılar dilerim.

1) Aşağıdaki soruları yanında bulunan parantez içine doğru ise “D”, yanlış ise “Y” yazarak cevaplayınız (Her şık 4 p).

(D) Bir izomorfimin tersi de izomorfizmdir.

(Y) $L:V\to W$ bir lineer dönüşüm olmak üzere $\{\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n\}$ vektör kümesi V nin bir bazı ise $\{L(\alpha_1), L(\alpha_2),..., L(\alpha_n)\}$ de W nun bazıdır.

(D) Her lineer dönüşüme bir matris, her matrise bir lineer dönüşüm karşılık gelir.

(Y) Bir iç çarpım uzayında her vektör kümesi ortogonal hale getirilebilir.

(Y) Aynı boyutlu vektör uzayları arasında tanımlı bir lineer dönüşümün matrisinin determinantı sıfır olamaz.

2) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y+3z=0\}$ vektör uzayının ortogonal tümleyenini bulunuz (20 p).

3) $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ A(x,y,z)=(x+z,\ x+y+z,\ 2x+y+3z)$ lineer dönüşümü için (Her şık 4 p.)

a) ÇekA yı, b) $A(\mathbb{R}^3)$ vektör uzayının bir bazını, c) boy(çekA) ve rankA yı bulunuz.

d) A lineer dönüşümü 1-1 midir? Nedenini açıklayınız.

e) A lineer dönüşümü örten midir? Nedenini açıklayınız.

4) $\mathbb{R}^2$ nin $S=\{(2,1),(3,2)\}$ bazı için S nin dual bazını bulunuz (10 p).

5) $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ L(x,y,z)=(2x+3y-z, 2x-y+3z)$ ile tanımlı bir lineer dönüşüm olsun. Sırasıyla $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^2$ nin $S=\{(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ ve $T=\{(1,1),(2,1)\}$ bazlarına göre L lineer dönüşümünün matrisini bulunuz (20 p).

6) $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü $L(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2-x_3, -x_1+x_2-x_3, -x_1-x_2+x_3)$ olarak veriliyor. $\lambda\in\mathbb{R},\ v=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ olmak üzere $L(v)=\lambda v$ eşitliğini sağlayan **sıfırdan farklı** λ reel sayılarını bulunuz (10 p) .

Soru: 2) $W = \{(x,y,z) : x+2y+3z=0\}$

$\forall (x,y,z) \in W$ için $x+2y+3z=0$

$x=-2y-3z \Rightarrow (x,y,z) = (-2y-3z, y, z)$

$= y(-2,1,0) + z(-3,0,1)$

$\Rightarrow W = sp\{(-2,1,0), (-3,0,1)\}$ yani germe sağlanır

O halde lineer bağımsızlığı gösterelim $a,b \in \mathbb{R}$ için

$a(-2,1,0) + b(-3,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow a=b\overset{?}{=}0$

$-2a-3b=0$
$a=0 \Rightarrow b=0$ O halde $\{(-2,1,0), (-3,0,1)\}$ sistemi lineer bağımsızdır.

O halde W nın bir bazıdır

Şimdi bunun ortogonal tümleyenini bulalım O halde $\forall K=(x,y,z) \in W^{\perp}$ için

$\langle K, (-2,1,0)\rangle = \langle (x,y,z), (-2,1,0)\rangle = 0$
$\langle K, (-3,0,1)\rangle = \langle (x,y,z), (-3,0,1)\rangle = 0$ olmalı

$-2x+y=0$
$y=2x$

$-3x+z=0$
$z=3x$

$\Rightarrow K=(x,y,z) \in W^{\perp}$ olduğunda

$K=(x,y,z) = (x,2x,3x)$ olup
$= x(1,2,3)$
yazılır.

O halde $W^{\perp} = sp\{(1,2,3)\}$

dır

Soru 3) $A: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \longrightarrow A(x,y,z) = (x+z,\ x+y+z,\ 2x+y+3z)$$

a) $\text{Çek}\, A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid A(x,y,z) = (0,0,0) \}$

$$(x+z,\ x+y+z,\ 2x+y+3z) = (0,0,0)$$

$$x+z=0$$
$$x+y+z=0 \Rightarrow y=0, \Rightarrow z=0 \quad x=0$$

$$\text{Çek}\, A = \{(0,0,0)\}$$

b) $A(\mathbb{R}^3) = \{ A(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}^3 \}$

$$= \{ A(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \}$$

$$A(x,y,z) = (x+z,\ x+y+z,\ 2x+y+3z)$$
$$= (x,x,2x) + (0,y,y) + (z,z,3z)$$
$$= x(1,1,2) + y(0,1,1) + z(1,1,3)$$

$S = \{(1,1,2), (0,1,1), (1,1,3)\}$ sistemi germeyi sağlar

Lineer bağımsız mı diye inceleyelim.

$c_1(1,1,2) + c_2(0,1,1) + c_3(1,1,3) = \vec{0}$ iken $c_1 = c_2 = c_3 \overset{?}{=} 0$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 \end{array}\right\} c_2 = 0$$
$$2c_1 + c_2 + 3c_3 = 0$$

$$2c_1 + 3c_3 = 0$$
$$-3 /\ c_1 + c_3 = 0$$
$$-c_1 = 0 \quad \boxed{c_1 = 0}$$
$$c_3 = 0$$

O halde S sistemi $A(\mathbb{R}^3)$ uzayının bir bazıdır

c) boy Çek A = ?

Çek $A = \{(0,0,0)\} = sp\{(0,0,0)\}$

lineer bağımlı

O halde baz olarak alamam. Yani boş küme

O halde Çek $A = \{\ \} \Rightarrow$ boy Çek A = sıfırlık $A = 0$

rank A = ? (rank A + $\underbrace{\text{sıfırlık } A}_{0}$ = boy $A(\mathbb{R}^3)$)

rank A = $\underbrace{\text{boy } A(\mathbb{R}^3)}_{3} \Rightarrow$ rank $A = 3$

d) // $L: V \rightarrow W$ dönüşümü 1-1 $\Leftrightarrow$ Çek $L = \{0_V\}$ //

O halde Çek $A = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Rightarrow A$ 11 dir

e) // $L: V \rightarrow W$

boy V = boy W ise L 11 $\Rightarrow$ örten

L örten $\Rightarrow$ 1-1 //

O halde A lineer dönüşümü boy $\mathbb{R}^3$ = boy $\mathbb{R}^3 = 3$ olup 1-1 old için örtendir.

$S = \{ \underbrace{(2,1)}_{\alpha_1}, \underbrace{(3,2)}_{\alpha_2} \}$

Soru:4) S nin dual bazını $\{f_1, f_2\}$ ile gösterelim f_1 ve f_2 yi bulalım

$f_1(\alpha_1) = 1$ $\qquad$ $f_2(\alpha_1) = 0$

$f_1(\alpha_2) = 0$ $\qquad$ $f_2(\alpha_1) = 1$

$\{e_1, e_2\}$, $\mathbb{R}^2$ nin standart tabanı olmak üzere

$$f_1(2,1) = f_1(2e_1 + e_2) \overset{-2}{=} 2f_1(e_1) + f(e_2) = 1$$
$$f_1(3,2) = f_1(3e_1 + 2e_2) = 3f_1(e_1) + 2f_1(e_2) = 0$$

$$\boxed{f_1(e_1) = -1}$$
$$f(e_2) = 3$$

$\Rightarrow f_1(x,y) = -x + 3y$ #

$$f_2(2,1) = f_2(2e_1 + e_2) \overset{-2}{=} 2f_2(e_1) + f_2(e_2) = 0$$
$$f_2(3,2) = f_2(3e_1 + 2e_2) = 3f_2(e_1) + 2f_2(e_2) = 1$$

$$-f_2(e_1) = 1$$
$$f_2(e_1) = 1 \qquad f_2(e_2) = -2$$

$f_2(x,y) = x - 2y$ #

Soru 5) $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \to L(x,y,z) = (2x+3y-z \;,\; 2x-y+3z)$

$S = \{(1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$, $T = \{(1,1), (2,1)\}$

$L(1,0,1) = (1,5)$

$L(1,1,0) = (5,1)$

$L(1,1,1) = (4,4)$

$L(1,0,1) = (1,5) = a.(1,1) + b(2,1)$

$-/\; 1 = a+2b$

$5 = a+b$

$4 = -b$

$\boxed{b=4}$

$\boxed{a=9}$

$[L(1,0,1)]_T = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix}$

$L(1,1,0) = (5,1) = a.(1,1) + b(2,1)$

$5 = a+2b$

$-/\; 1 = a+b$

$\boxed{4=b}$

$a=-3$

$[L(1,1,0)]_T = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$L(1,1,1) = (4,4) = a.(1,1) + b(2,1)$

$a+2b=4$

$a+b=4$

$\boxed{b=0}$

$a=4$

$[L(1,1,1)]_T = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

$A_{S,T} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ matris temsili elde edilir

CamScanner ile tarandı

Soru 6: $L(v)=\lambda v \Leftrightarrow L(x_1,x_2,x_3)=\lambda(x_1,x_2,x_3)$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2-x_3,\ -x_1+x_2-x_3,\ -x_1-x_2+x_3)=(\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \lambda x_3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1-x_2-x_3=\lambda x_1 \\ -x_1+x_2-x_3=\lambda x_2 \\ -x_1-x_2+x_3=\lambda x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x_1-x_2-x_3=0 \\ -x_1+(1-\lambda)x_2-x_3=0 \\ -x_1-x_2+(1-\lambda)x_3=0 \end{cases}$$

Homojen lineer denklem sisteminde 3 bilinmeyen ve 3 denklem olup sıfırdan farklı çözümler isteniyor. O halde, katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}}_{\lambda-2} - \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1-\lambda & -1 \end{vmatrix}}_{2-\lambda}$$

(1. sütuna göre açılım)

$$=(1-\lambda)\underbrace{((1-\lambda)^2-1)}_{\lambda^2-2\lambda}+2\lambda-4$$

$$=(1-\lambda)\lambda(\lambda-2)+2(\lambda-2)$$

$$=(\lambda-2)(-\lambda^2+\lambda+2)$$

$$=(\lambda-2)(2-\lambda)(\lambda+1)$$

$$=(\lambda-2)^2(-\lambda-1)=0$$

$\Leftrightarrow \lambda=2,\ \lambda=-1$