Ad-Soyad : Cevap Anahtarı .

Numara :

Lineer Cebir I Bütünleme Sınavı Soruları **03.02.2024**

NOT : Süre 90 dakikadır. Cevaplarınızı ayrıntılı biçimde yazınız. Sınıfta öğretilmeyen yöntemler kabul edilmez. Başarılar dileriz.

1) Aşağıdaki ifadelerin yanına doğru ise D, yanlış ise Y yazınız.

(D) Lineer bağımlı bir kümeyi kapsayan her küme lineer bağımlıdır (4 p).

(Y) Rasyonel sayılar kümesi reel sayılar cismi üzerinde vektör uzayıdır (4 p).

(D) Uzayda orijinden geçen her düzlem $\mathbb{R}^3$ ün bir alt vektör uzayıdır (4 p).

(D) Her kare matris elementer matrislerin çarpımı olarak yazılabilir (4 p).

(Y) Denk matrislerin deteminantları eşittir (4 p).

2) $\{u, v, w\}$ vektör kümesi lineer bağımsız olsun. $\{u+v,\ u-v,\ u-2v+w\}$ vektör kümesinin de lineer bağımsız olduğunu gösteriniz (20 p).

3) A nxn lik bir reel matris olsun. nx1 lik bütün X matrisleri için AX=0 ise A nın sıfır matrisi olduğunu gösteriniz (10 p).

4) $\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}=6$ ise aşağıdaki deteminantları **determinant açılımı yapmadan** hesaplayınız (20 p).

a) $\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \end{bmatrix}$

b) $\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \frac{1}{2}a_3 \\ b_1 & b_2 & \frac{1}{2}b_3 \\ 4a_1-2c_1 & 4a_2-2c_2 & 2a_3-c_3 \end{bmatrix}$

5) $V=\{(a,b,c,d): b-2c+d=0\}$ ve $W=\{(a,b,c,d): a=d, b=2c\}$ $\mathbb{R}^4$ uzayının iki alt vektör uzayı olsun. $V\cap W$ alt vektör uzayının bir bazını bulunuz (20 p).

6) V, n - boyutlu bir vektör uzayı, U ise V nin bir alt vektör uzayı olsun. boyU=boyV ise U=V olduğunu gösteriniz (10 p).

Lineer Cebir I Bütünleme Cevap Anahtarı

2) $c_1(u+v)+c_2(u-v)+c_3(u-2v+w)=\vec{0}$ iken $c_1=c_2=c_3\overset{?}{=}0$ mı?

$(c_1+c_2+c_3)u+(c_1-c_2-2c_3)v+c_3w=\vec{0}$

u, v, w lineer bağımsız olduğundan

$c_3=0$

$c_1+c_2+c_3=0 \Rightarrow c_1+c_2=0$

$c_1-c_2-2c_3=0 \Rightarrow c_1-c_2=0$

$+$

$2c_1=0$

$c_1=0$

$c_2=0$

O halde $\{u+v,\ u-v,\ u-2v+w\}$

lineer bağımsızdır

CamScanner ile tarandı

3) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ olsun.

$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ için $AX = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ olup A matrisin 1. sutunu 0 olarak bulunur.

$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ için $AX = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ olup A matrisinin 2. sutunu da 0 olarak bulunur.

$\vdots$

$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ için $AX = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ olup A matrisinin n. sutunu da 0 olarak bulunur.

O halde A matrisi sıfır matrisidir.

4) a) $\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}}_{\text{iki satır aynı olduğu için determinant } 0} = -\underbrace{\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}}_{6}$

iki satır yer değiştirsek determinantın işareti değiş.

$= -6$ #

b) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \frac{1}{2}a_3 \\ b_1 & b_2 & \frac{1}{2}b_3 \\ 4a_1-2c_1 & 4a_2-2c_2 & 2a_3-c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \frac{1}{2}a_3 \\ b_1 & b_2 & \frac{1}{2}b_3 \\ 4a_1 & 4a_2 & 2a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \frac{1}{2}a_3 \\ b_1 & b_2 & \frac{1}{2}b_3 \\ -2c_1 & -2c_2 & -c_3 \end{vmatrix}$

$= 4 \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}}_{\text{iki satır aynı old için } 0} + (-2) \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}_{6} = -\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 6$

$= -6$ #

CamScanner ile tarandı

5) $V = \{(a,b,c,d) : b-2c+d=0\}$

$W = \{(a,b,c,d) : a=d, \; b=2c\}$ $\Rightarrow V\cap W = \left\{(a,b,c,d) : \begin{matrix} b-2c+d=0 \\ a=d \\ b=2c \end{matrix}\right\}$

$b-2c+d=0$, $b \to 2c$

$2c-2c+d=0 \Rightarrow \boxed{d=0}$

$\boxed{a=0}$

$(a,b,c,d) = (0,2c,c,0)$

$a \to 0$, $b \to 2c$, $c \to c$, $d \to 0$

$(a,b,c,d) = c\,(0,2,1,0)$

olup

$U\cap W = sp\{(0,2,1,0)\}$ dır.

Ayrıca $(0,2,1,0) \neq (0,0,0,0)$ olduğundan $\{(0,2,1,0)\}$

lineer bağımsızdır

6) U, V nin alt vektör uzayı olduğundan $U \subset V$ olduğu açıktır. $V \subset U$ olduğunu göstermeye çalışalım.

$\{\alpha_1, \ldots \alpha_n\}$ U nun bir bazı olsun. boy U = boy V = n olduğundan da U nun bir bazı V nin de bir bazıdır. O halde $x \in V$ alırsak x'i U uzayının baz elemanları cinsinden yazabiliriz.

$x = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$ şeklinde yazabiliriz.

Baz vektörleri U nun bir elemanı olduğu için x, U nun elemanlarının lineer birleşimi şeklinde yazılmış olur. O halde $x \in U$ olur.

Yani $x \in V$ alındığında $x \in U$ olduğu görüldü. Yani $V \subset U$ elde edilir. $V \subset U$ ve $U \subset V$ olduğuna göre $U = V$ bulunur.