

NOT : Sınıfta öğretilmeyen yöntemlerle yapılan çözümler kabul edilmez. Başarılar.

1) Aşağıdaki ifadelerin yanına doğru ise D, yanlış ise Y yazınız.

(D) Her vektör uzayının bir sıfır vektörü vardır (4 p).

(D) Üçgensel bir kare matrisin determinantı esas köşegen elemanlarının çarpımıdır (4 p).

(Y) Denklem ve bilinmeyen sayısı eşit olan her lineer denklem sistemi çözülebilir. (4 p).

(D) Her permütasyonun tersi de bir permütasyondur (4 p).

(D) Her kare A, B matrisi için $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ dir (4 p).

2) $\sigma = (1, 3, 5)(2, 4), \tau = (1, 2, 6)(3, 4), \mu = (1, 5, 4) \in S_6$ olarak veriliyor.

a) $\sigma\gamma\tau = \mu$ denklemini sağlayan γ permütasyonunu bulunuz (7 p).

b) $(\sigma\tau)\mu$ permütasyonunu ayırık permütasyonların çarpımı olarak yazınız (7 p).

c) $\sigma(\tau\mu)$ permütasyonunun işaretini belirleyiniz (6 p).

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ olsun. $R = E_k E_{k-1} \dots E_1 A$ eşitliğini sağlayacak $E_1, E_2, \dots, E_k$ elementer

matrislerini ve satırca indirgenmiş basamaklı R matrisini bulunuz (20 p).

4) $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ matrisinin için $\det(A) = 5$ tir. $\det \begin{bmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ 3g & 3h & 3i \\ d & e & f \end{bmatrix} = ?$ (20 p).

5) $n \times n$ lik, tersi olan A ve B matrisleri için $A(ekA) = (\det A)I_n$ olduğunu kullanarak

$ek(AB) = (ekB)(ekA)$ olduğunu gösteriniz (20 p).

6) Derecesi en fazla 3 olan polinomlar kümesi M olmak üzere M nin polinomlardaki toplama işlemine göre değişmeli grup olduğu biliniyor. M nin skalerle çarpma işlemiyle birlikte $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz (20 p).

$$2) \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mu^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$a) \quad \underbrace{\sigma^{-1} \cdot \sigma}_{I} \cdot \underbrace{\tau \cdot \tau^{-1}}_{I} = \mu \quad \Rightarrow \quad \gamma = \sigma^{-1} \mu \tau^{-1}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (164)(235) \#$$

$$b) \quad (\sigma \tau) \mu = (263)$$

c) Permutasyonlarda sırpma izleri birleşimlidir.

$$\Rightarrow \sigma(\tau \mu) = (\sigma \tau) \mu = (263) = (23)(26)$$

$$\Rightarrow s(\sigma(\tau \mu)) = 1$$

3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

 $-R_1 + R_3$ $-R_1 + R_2$

↓

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

 $-R_2 + R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow E_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

 $-\frac{1}{2}R_2$

→

 $\frac{R_3}{3}$

$$\downarrow E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{bmatrix}$$

 $-\frac{1}{2}R_3 + R_2$

→

 $-2R_3 + R_1$ $-R_2 + R_1$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{bmatrix}}$$

↳ R

#

$$E_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_8 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4) \begin{vmatrix} a+2d & b+7e & c+2f \\ 3g & 3h & 3i \\ d & e & f \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} + 2 \cdot 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}}_{\text{iki satır aynı} \\ 0}$$

-5

$$= -15 \#$$

5) $ek\ AB = ek\ B \cdot ek\ A$ oldü görülmü.

$$A(ek\ A) = (\det A)I$$

$$AB\ ek\ (AB) = (\det AB)I \quad \text{oldü biliyoruz.}$$

$$ek\ (AB) = ek\ B \cdot ek\ A \Leftrightarrow AB \cdot ek\ (AB) = AB \cdot \underbrace{(ek\ B) \cdot ek\ A}$$

$$\Leftrightarrow AB\ ek\ (AB) = A \cdot (\det B \cdot I) \cdot ek\ A$$

$$\Leftrightarrow AB \cdot ek\ (AB) = (\det B) \cdot I \cdot \underbrace{(A \cdot ek\ A)}_{\det A \cdot I}$$

$$= (\det B) \cdot (\det A) \cdot I$$

$$= (\det (AB)) \cdot I$$

$$(AB) ek\ (AB) = (\det (AB))I \Rightarrow AB \cdot ek\ (AB) = (\det A)(\det B) \cdot I$$

$$\Rightarrow AB \cdot ek\ (AB) = \det B \underbrace{(\det A)I}_{A(ek\ A)} = A((\det B)I) ek\ A$$

$$= A \cdot B \cdot (ek\ B)(ek\ A)$$

Her iki tarafı $(AB)^T$ ile çarpalım

$$AB\ ek\ (AB) = A \cdot B \cdot (ek\ B) \cdot (ek\ A)$$

$$ek\ (AB) = (ek\ B)(ek\ A) \quad \#$$

6)

 $p(x), q(x) \in M$ için

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$q(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

 $c, d \in \mathbb{R}$ olsun.

M , toplama göre değişmeli grup olduğundan, vektor uzayı olması için skaler ile çarpma işleminin sağlanması gerekir aksiyonları kontrol edelim:

$$\bullet c \cdot p(x) \stackrel{?}{\in} M:$$

$$c \cdot (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = (\underbrace{ca_3}_{\in \mathbb{R}})x^3 + (\underbrace{ca_2}_{\in \mathbb{R}})x^2 + (\underbrace{ca_1}_{\in \mathbb{R}})x + (\underbrace{ca_0}_{\in \mathbb{R}}) \in M \text{ dir.}$$

$$\bullet c \cdot (p(x) + q(x)) \stackrel{?}{=} c \cdot p(x) + c \cdot q(x)$$

$$p(x) + q(x) = (a_3 + b_3)x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0$$

$$c \cdot (p(x) + q(x)) = c \cdot (a_3 + b_3)x^3 + c \cdot (a_2 + b_2)x^2 + c \cdot (a_1 + b_1)x + c \cdot (a_0 + b_0)$$

$$= (ca_3 + cb_3)x^3 + (ca_2 + cb_2)x^2 + (ca_1 + cb_1)x + ca_0 + cb_0$$

$$= ca_3x^3 + ca_2x^2 + ca_1x + ca_0 + cb_3x^3 + cb_2x^2 + cb_1x + cb_0$$

$$= c \cdot \underbrace{(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)}_{p(x)} + c \cdot \underbrace{(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0)}_{q(x)} \quad \#$$

$$\bullet (c+d)p(x) \stackrel{?}{=} cp(x) + dp(x)$$

$$(c+d)p(x) = (c+d)a_3x^3 + (c+d)a_2x^2 + (c+d)a_1x + (c+d)a_0$$

$$= ca_3x^3 + da_3x^3 + ca_2x^2 + da_2x^2 + ca_1x + da_1x + ca_0 + da_0$$

$$= ca_3x^3 + ca_2x^2 + ca_1x + ca_0 + da_3x^3 + da_2x^2 + da_1x + da_0$$

$$= c \underbrace{(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)}_{p(x)} + d \underbrace{(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)}_{p(x)} \quad \#$$

$$\bullet c(d p(x)) \stackrel{?}{=} (cd) \cdot p(x)$$

$$c \cdot (d p(x)) = c \cdot (d a_3x^3 + d a_2x^2 + d a_1x + d a_0)$$

$$= c \cdot d a_3x^3 + c \cdot d a_2x^2 + c \cdot d a_1x + c \cdot d a_0$$

$$= (c \cdot d) \underbrace{(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)}_{p(x)} \quad \#$$

$$\bullet 1 \in \mathbb{R} \text{ için } 1 \cdot p(x) \stackrel{?}{=} p(x)$$

$$1 \cdot \underbrace{(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)}_{p(x)} = \underbrace{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}_{p(x)} \quad \text{oldu}$$

0 halde M kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde vektör uzayıdır.