

Ad-Soyad :

Numara :

Lineer Cebir I Ara Sınav Cevap Anahtarı

16.11.2025

1) Aşağıdaki ifadelerin yanına doğru ise D, yanlış ise Y yazınız.

(D) Denk matrislerin satırca indirgenmiş basamaklı halleri aynıdır (2 p).

(D) $n \times n$ lik iki köşegen matrisin çarpımı da bir köşegen matristir (2 p).

(D) $S_1, AX=0$ homojen lineer denklem sisteminin, $S_2, AX=B$ lineer denklem sisteminin çözümü ise $S_1+S_2, AX=B$ nin bir çözümüdür (2 p).

(D) Matris toplamı değişmelidir (2 p).

(Y) Her matrisin tersi vardır (2 p).

2) A, B ve C matrisleri için $A(B+C)$ işleminin tanımlı olduğu biliniyor.

a) $AB+AC$ işleminin de tanımlı olduğunu gösteriniz (10 p).

b) $A(B+C)=AB+AC$ olduğunu gösteriniz (10 p).

3) A ve B aynı türden kare matris olsun. “ $A^2 = I \Rightarrow A = I$ veya $A = -I$ ” önermesi doğru ise ispatlayınız, yanlış ise örnek veriniz (20 p).

4) A ve B $n \times n$ lik alt üçgensel matris olsun.

a) Alt üçgensel matris tanımını yapınız (10 p).

b) AB çarpımının da alt üçgensel matris olduğunu gösteriniz (10 p).

5) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & k & 2 \\ 2 & -1 & 2k-1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & k & 4 \end{bmatrix}$ olsun.

a) A matrisinin tersinin olması için k sayısını belirleyiniz (10 p).

b) $k=-2$ için A nın tersini bulunuz (10 p).

6) İlaveli katsayılar matrisi $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & k & n \end{array} \right]$ olan lineer denklem sisteminin

a) tek çözümü olması (5 p),

b) sonsuz çözümü olması (5 p),

c) çözümünün olmaması için k ve n yi belirleyiniz (5 p).

a ve b şıkkı için çözümleri bulmanıza gerek yoktur.

2) $A(B+C)$ tanımlı ise boyutlarını aşağıdakilerle sağlaman gerek. $B+C$ tanımlı old B ile C nin boyutu aynı olmalı

B ve C $n \times p$ tipinde matris olsunlar

$A(B+C)$ nin tanımlı olması için A nın sütun sayısı ile $(B+C)$ nin satır sayısı aynı olmalı. O halde A , $m \times n$ tipinde olsun

$$\begin{array}{cc} A & B \\ \downarrow & \downarrow \\ m \times n & n \times p \end{array} \quad \text{tanımlı}$$

$$\begin{array}{cc} A & C \\ \downarrow & \downarrow \\ m \times n & n \times p \end{array} \quad \text{tanımlı}$$

$$A(B+C) = AB + AC \quad \text{old gösterelim.}$$

esitliği göstermek karşılıklı elemanlar eşit olmalı.

$$A = [a_{ij}]$$

$$B = [b_{jk}]$$

$$C = [c_{jk}]$$

$$A(B+C) \text{ nin elemanları: } (B+C)_{jk} = b_{jk} + c_{jk}$$

$$[A(B+C)]_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} (b_{jk} + c_{jk}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} + a_{ij} c_{jk}$$

matris
çarpımında

$AB + AC$ nin elemanları:

$$[AB]_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

$$[AC]_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{jk}$$

$$\begin{aligned} [AB+AC]_{ik} &= [AB]_{ik} + [AC]_{ik} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} + a_{ij} c_{jk} \end{aligned}$$

= Yani
tüm (i,k)
elemanlar eşit
dolayısıyla birbirine
esittir.

$$3) A^2 = I \Rightarrow A = I \text{ veya } A = -I$$

Yahistır Aksine örnek

$$A \text{ } 2 \times 2 \text{ türünde } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ olsun}$$

$$A^2 = I \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ olup } A^2 = I \text{ sağlandı}$$

Ama $A = I$ veya $A = -I$ değildir.

4) A ve B $n \times n$ lik alt üçgensel matris olsun.

a) Bir A matrisinin alt üçgensel matris olması demek esas köşegen üzerindeki tüm elemanların sıfır olması demektir.
Yani $A = [a_{ij}]$ ise tüm $i < j$ için $a_{ij} = 0$ dir.

b) $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ alt üçgensel ise

$$i < j \text{ için } a_{ij} = 0$$

$$i < j \text{ için } b_{ij} = 0.$$

$$C = AB, C = [c_{ij}] \text{ olsun}$$

Matris çarpım kuralından $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ $i < j$ için c_{ij} nin sıfır olduğunu göstermeliyiz

$i < j$ koşulunu sağlayan herhangi bir C_{ij} elemanı alalım.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

$$k \leq i$$

$$k \leq i < j \text{ varsayalım}$$

$$\text{Yani } k < j \Rightarrow b_{kj} = 0$$

$$0 \text{ hâkkâ } a_{ik} \cdot b_{kj} = 0$$

$$k > i \text{ old için } a_{ik} = 0$$

$$0 \text{ hâkkâ } a_{ik} b_{kj} = 0$$

Yani $c_{ij} = 0$ oldu $i < j$ için
Yani AB alt üçgensel matris

5)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & k & 2 \\ 2 & -1 & 2k+1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & k & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} -2S_1 + S_2 \\ S_1 + S_3 \\ -S_1 + S_4 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+k & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Tersihli omou in I matrisie indigenzimesi gech
0 halde $1+k$ 0 omamali dr.

$$1+k \neq 0 \Rightarrow k \neq -1 \text{ in tasi vdr.}$$

b) $k = -2$ in $[A|I] = [I|A^{-1}]$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} R_4 + R_3 \\ -R_4 + R_2 \\ -2R_4 + R_1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3/2 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{array} \right]$$

uygulanis
holi

$$\begin{array}{l} -2R_3 + R_1 \\ R_3 + R_2 \\ -R_3 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} R_2 + R_1 \\ \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{array} \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{I}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{A}^{-1}}$

$$6) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & k & n \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-3s_1 + s_2 \\ -2s_1 + s_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & -7 \\ 0 & 1 & k+2 & n-4 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}s_2 + s_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & k + \frac{17}{5} & n - \frac{27}{5} \end{array} \right]$$

a) $k \neq -\frac{17}{5}, n \in \mathbb{R}$.

b) $k = -\frac{17}{5}, n = \frac{27}{5}$

c) $k = -\frac{17}{5}, n \neq \frac{27}{5}$