Ad-Soyad :

Numara : Cevap Anahtarı

Lineer Cebir I Bütünleme Sınavı Soruları **24.01.2025**

NOT : Süre 90 dakikadır. Cevaplarınızı ayrıntılı biçimde yazınız. Sınıfta öğretilmeyen yöntemler kabul edilmez. Başarılar dileriz.

1) Aşağıdaki ifadelerin yanına doğru ise D, yanlış ise Y yazınız.

(D) Sonlu boyutlu bir V vektör uzayında lineer bağımsız her kümeden V nin bir bazı elde edilebilir (2 p).

(Y) Matris çarpımı değişmelidir (2 p).

(D) Bir permütasyonun tersi de permütasyondur (2 p).

(D) Birim matrise satırca denk olan matrisin tersi vardır (2 p).

(Y) Tam sayılar kümesi çarpma işlemine göre gruptur (2 p).

2) 5×5 tipinde bir A matrisi için $\det A = 3$ olduğuna göre

a) $\det\left(A^{-1}\right)$ b) $\det\left(A^{t}\right)$ c) $\det\left(2A^{6}\right)$ d) $\det\left(\left(A^{-1}\right)\left(A^{6}\right)\right)$

determinantlarını hesaplayınız (20 p).

3) $\{(1,0,1,0),\ (1,1,0,1),\ (1,0,0,a),(0,0,1,b)\}$ vektör kümesinin $\mathbb{R}^4$ ün bazı olması için a ve b reel sayıları arasındaki ilişkiyi belirleyiniz (20 p).

4) $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\le 0\}$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ ün alt vektör uzayı olup olmadığını araştırınız. Eğer alt uzayı ise bir bazını bulunuz (10 p).

5) $\begin{cases} 2x+4y=a \\ 3x+6y=b \\ 2x+9y=b-3 \\ x+2y=a-2 \end{cases}$ lineer denklem sisteminin çözümlerini a ve b sayılarına göre irdeleyiniz (10 p). Çözüm olması durumunda çözümleri bulunuz (10 p).

6) U, V vektör uzayının bir alt vektör uzayı olsun.

a) $U+U=\{u_1+u_2 : u_1,u_2\in U\}$ kümesinin U ya eşit olduğunu gösteriniz (10 p).

b) c sıfırdan farklı bir skaler olmak üzere $cU=\{cu : u\in U\}$ kümesinin U ya eşit olduğunu gösteriniz (10 p).

2) a) $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = \dfrac{1}{\det A} = \dfrac{1}{3}$

b) $\det(A^{t}) = \det A = 3$

c) $\det(2A^{6}) = 2^{5}\det(A^{6}) = 2^{5}(\det A)^{6} = 2^{5}\cdot 3^{6}$

d) $\det((A^{-1})(A^{6})) = \det(\underbrace{(A^{-1}A)}_{I} A^{5}) = \det(A^{5}) = (\det A)^{5} = 3^{5}$

3) n boyutlu uzayda n tane vektörün lineer bağımsız olması için gerek yeter şart bu vektörler üzerine kurulan matrisin determinantının sıfırdan farklı olmasıdır.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -a-b \neq 0 \iff a \neq -b$$

4) $(-1,1,1) \in U$, $c=-1 \in \mathbb{R}$ için

$-1.(-1,1,1) = (1,-1,-1) \notin U \Rightarrow U$ alt vektör uzayı değildir.

5) $$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & a \\ 3 & 6 & b \\ 2 & 9 & b-3 \\ 1 & 2 & a-2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_4} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a-2 \\ 3 & 6 & b \\ 2 & 9 & b-3 \\ 2 & 4 & a \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-2R_1+R_3 \\ -2R_1+R_4}]{-3R_1+R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a-2 \\ 0 & 0 & -3a+6+b \\ 0 & 5 & -2a+1+b \\ 0 & 0 & -a+4 \end{array}\right]$$

$-a+4 \neq 0$ veya $-3a+6+b \neq 0$ ise kötü satır oluşur ve çözüm yoktur.

$-a+4=0$ ve $-3a+6+b=0$ ise yani $a=4, b=6$ ise sistem

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_2+R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 12/5 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

halini alır ve $x=\frac{12}{5}$, $y=-\frac{1}{5}$ şeklinde tek çözüm vardır.

6) a) $\forall x \in U+U$ alalım. $U+U$ nun tanımından $x=u_1+u_2$ olacak şekilde $u_1,u_2 \in U$ vardır. U alt vektör uzayı olup $u_1,u_2 \in U$ için $u_1+u_2 \in U$ olur. Yani, $x \in U$ olup $U+U \subset U$ elde edilir. Şimdi de $U \subset U+U$ olduğunu gösterelim. $\forall x \in U$ alalım. $x = x+0_V$ şeklinde yazılabilir. U,V nin alt uzayı olup $0_V \in U$ dur. O halde

$$x=\underbrace{x}_{\in U}+\underbrace{0_V}_{\in U}$$ yazılışından $x \in U+U$ elde edilir.

$U \subset U+U$ bulunur. $U+U \subset U$ ve $U \subset U+U$ olup

$U+U=U$ elde edilir.

b) $\forall x \in cU$ alalım. cU nun tanımından $x=cu$ olacak şekilde $u \in U$ vardır. U, alt vektör uzayı olup $u \in U$ ve c skaler için $cu \in U$ olur. $cu=x$ olup $x \in U$ dur ve $cU \subset U$ bulunur. Şimdi de $U \subset cU$ olduğunu gösterelim.

$\forall x \in U$ alalım. c sıfırdan farklı skaler olup c^{-1} mevcuttur.

c^{-1} skaler, $x \in U$, U alt uzay $\Rightarrow c^{-1}x \in U$

c skaler, $c^{-1}x \in U \Rightarrow c(c^{-1}x) = (cc^{-1})x$

$= 1 \cdot x = x \in cU$

$x \in U$ iken $x \in cU$ olup $U \subset cU$ dur.

$cU \subset U$, $U \subset cU \Rightarrow cU = U$.