

NOT : Sınıfta öğretilmeyen yöntemlerle yapılan çözümler kabul edilmez. Başarılar.

1) Aşağıdaki ifadelerin yanına doğru ise D, yanlış ise Y yazınız.

(D) Her cisim kendi üzerinde bir vektör uzayıdır (4 p).

(Y) Tersi olan bir matrisin determinantı sıfır olabilir (4 p).

(Y) Denklem ve bilinmeyen sayısı farklı olan lineer denklem sistemi çözülemez (4 p).

(Y) Her matris, elementer matrislerin çarpımı olarak yazılabilir (4 p).

(D) İki permütasyonun çarpımı (bileşkesi), bir permütasyondur (4 p).

2) $\sigma = (1, 2)(3, 4, 5) \in S_5$ olarak veriliyor.

a) σ^k birim permütasyon olacak şekilde en küçük k sayısını bulunuz (10 p).

b) σ^{-1} permütasyonunu dairesel permütasyonların çarpımı olarak yazınız (10 p).

$$3) \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y - z = 6 \\ 4x - 5y + 3z = 28 \end{cases} \quad \text{lineer denklem sistemi veriliyor.}$$

a) Sistemin bir Cramer sistemi olduğunu gösteriniz (10 p).

b) Sistemi Cramer yöntemiyle çözünüz (10 p).

4) 3×3 lük A, B ve C matrisleri için $\det A = 3$, $\det B = -2$ ve $C = 2A^{-1}B^T$ olduğu biliniyor. Buna göre C matrisinin determinantını hesaplayınız (20 p).

5) $n \times n$ lik A matrisi için $A^2 + 2A + I = 0$ olduğu biliniyor.

a) A matrisinin tersi olduğunu gösteriniz (10 p).

b) A'nın tersini bulunuz (10 p).

6) $m \times n$ lik reel matrislerin kümesi $\mathbb{R}^{m \times n}$ nin matrislerdeki toplama işlemine göre değişmeli grup olduğu bilinmektedir. $\mathbb{R}^{m \times n}$ nin $\mathbb{R}$ üzerinde vektör uzayı olduğunu gösteriniz (20 p).

2) a) $\sigma = (1, 2)(3, 4, 5)$ uzunluğu 2 ve 3 olan iki dairesel permütasyonun çarpımı olarak verilmiştir. Uzunluğu a olan dairesel σ permütasyonu için σ^a nin birim permütasyon olduğunu biliyoruz. O halde σ^k nin birim permütasyon olması için en küçük $k = \text{oket}(2, 3) = 6$ olmalıdır.

b) $\sigma = (1, 2)(3, 4, 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1, 2)(3, 5, 4)$

3) a) Sistemin katsayılar matrisinin determinantı

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -9 & 7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -9 & 7 \end{vmatrix} = -(-21 + 27) = -6 \neq 0$$

olup sistem Cramer sistemidir.

b) $x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 28 & -5 & 3 \end{vmatrix}}{-6} = 2, y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 4 & 28 & 3 \end{vmatrix}}{-6} = -16, z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \\ 4 & -5 & 28 \end{vmatrix}}{-6} = -20$

4) $\det C = \det(2A^{-1}B^T) = 2^3 \det(A^{-1}) \det(B^T)$
 $= 8 \frac{1}{\det A} \det B = -\frac{16}{3}$

5) a) A^{-1} vardır $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$$A^2 + 2A + I = 0 \Leftrightarrow A^2 + 2A = -I \Leftrightarrow A(A + 2I) = -I$$

$$A(A + 2I) = -I \Rightarrow \det[A(A + 2I)] = \det(-I)$$

$$\Rightarrow (\det A)(\det(A + 2I)) = (-1)^n \underbrace{\det I}_1 = 71$$

$$\Rightarrow \det A \neq 0 \neq \det(A + 2I)$$

$\det A \neq 0$ olup A^{-1} vardır.

b) $A^2 + 2A + I = 0 \Rightarrow A^{-1}(A^2 + 2A + I) = 0 \Rightarrow A^{-1}A^2 + 2A^{-1}A + A^{-1}I = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_I A + 2I + A^{-1}I = 0 \Rightarrow A^{-1} = -A - 2I$$

6) Vektör uzayı aksiyomlarının sağlandığı gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m \times n} &\rightarrow \mathbb{R}^{m \times n} \\ (c, A) &\rightarrow \cdot (c, A) = cA \end{aligned} \quad \text{olduğunu biliyoruz.}$$

$$\forall c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ için}$$

$$1) c(A+B) = cA + cB$$

$$2) (c_1 + c_2)A = c_1A + c_2A$$

$$3) (c_1 c_2)A = c_1(c_2A)$$

$$4) 1 \cdot A = A$$

Olup vektör uzayı aksiyomları sağlanır. O halde $m \times n$ tipindeki reel matrislerin kümesi $\mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbb{R}$ cisim üzerinde vektör uzayıdır.