Ad-soyad : Cevap Anahtarı

Numara : <u>**Lineer Cebir II Bütünleme Sınavı Soruları**</u> **13.07.2024**

NOT : Süre 90 dakikadır. Sorularda belirtilen yöntemler dışında yapılan çözümler kabul edilmeyecektir. Cevaplarınızı ayrıntılı olarak yazınız. Başarılar.

1) Aşağıdaki ifadelerin yanına doğru ise D, yanlış ise Y yazınız.

(D) Bazlar arası geçiş matrisinin tersi vardır (4 p).

(D) Bir vektör uzayının her bazında eşit sayıda vektör vardır (4 p).

(D) Lineer bağımsız bir kümeden ortonormal bir küme elde edilebilir (4 p).

(Y) Sıfır vektörü her lineer dönüşümün öz vektörüdür (4 p).

(Y) Farklı öz değerlere karşılık gelen öz vektörler lineer bağımlı olabilir (4 p).

2) u=(1, -2, 1, 3), v=(2, 0, 1, -1)$\in\mathbb{R}^4$ olmak üzere $\mathbb{R}^4$ teki standart iç çarpımı kullanarak aşağıdakileri hesaplayınız (20 p).

a) $\langle u,u\rangle$ b) $\langle v,v\rangle$ c) $\langle u,v\rangle$ d) u ile v arasındaki açı

3) Her gerçel θ sayısı için $L_\theta(x,y)=(x\cos\theta-y\sin\theta, x\sin\theta+y\cos\theta)$ ile tanımlı $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dönüşümü düzlemdeki her v=(x, y) vektörünü, saat yönünün tersine θ açısı kadar döndürür.

a) L_θ nin bir lineer dönüşüm olduğunu gösteriniz (15 p),

b) $v=(1,1)$ vektörü ve $\theta=\frac{\pi}{4}$ gerçel sayısı için $L_\theta\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ü hesaplayınız (5 p).

4) $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&0\\2&1&2\end{bmatrix}$ matrisini köşegenleştiriniz (20 p).

5) a) Cayley – Hamilton Teoremini ifade ediniz (10 p).

b) Cayley – Hamilton Teoremini kullanarak $A=\begin{bmatrix}-3&2\\-4&3\end{bmatrix}^{99}$ matrisini hesaplayınız (10 p).

6) A matrisi köşegenleştirilebilir bir matris olsun. A^t matrisinin de köşegenleştirilebildiğini gösteriniz (10 p).

SORU 2: c) $\langle u,v\rangle = \langle (1,-2,1,3),\ (2,0,1,-1)\rangle$

$$= 2+0+1-3 = 0$$

a) $\langle u,u\rangle = \langle (1,-2,1,3),(1,-2,1,3)\rangle = 1+4+1+9 = 15$

b) $\langle v,v\rangle = \langle (2,0,1,-1),(2,0,1,-1)\rangle = 4+1+1 = 6$

d) u ile v arasındaki açı θ ise

$$\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = 0 \text{ ise } \boxed{\theta = 90}$$

$\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$ $\qquad \|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$

Soru 3) $L_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta \ , \ x\sin\theta + y\cos\theta)$, $v=(x,y)$

a) O halde $u=(x_1,y_1)$, $v=(x_2,y_2)$ olsun

$L_\theta(u+v) = L_\theta(u) + L_\theta(v)$

$L_\theta(cu) = c \cdot L_\theta(u)$ old gösterilirse lineer dönüşümdür

$L_\theta(\underset{(x_1,y_1)}{u}+\underset{(x_2,y_2)}{v}) = L_\theta(x_1+x_2, \ y_1+y_2) = ((x_1+x_2)\cos\theta - (y_1+y_2)\sin\theta \ , \ (x_1+x_2)\sin\theta + (y_1+y_2)\cos\theta)$

$$= \underbrace{(x_1\cos\theta - y_1\sin\theta, \ x_1\sin\theta + y_1\cos\theta)}_{L_\theta(u)} + \underbrace{(x_2\cos\theta - y_2\sin\theta, \ x_2\sin\theta + y_2\cos\theta)}_{L_\theta(v)}$$

$L_\theta(c\underset{(x_1,y_1)}{u}) = L_\theta(cx_1, cy_1) = (cx_1\cos\theta - cy_1\sin\theta \ , \ cx_1\sin\theta + cy_1\cos\theta)$

$$= c\underbrace{(x_1\cos\theta - y_1\sin\theta \ , \ x_1\sin\theta + y_1\cos\theta)}_{L_\theta(u)}$$

O halde $L_\theta(x,y)$ lineer dönüşümdür

b) $v=(1,1)$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

$L_{\frac{\pi}{4}}(1,1) = (1\cdot\cos\frac{\pi}{4} - 1\sin\frac{\pi}{4} \ , \ 1\cdot\sin\frac{\pi}{4} + 1\cdot\cos\frac{\pi}{4})$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ , \ \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \left(0, \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = (0, \sqrt{2})$

SORU 4: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

A matrisinin karakteristik denklemi

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -2 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ \lambda-1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-2) - 2\,3(\lambda-1)$$

$$= (\lambda-1)\Big(\underbrace{(\lambda-1)(\lambda-2)-6}_{\lambda^2-3\lambda+2-6}\Big) = (\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda-4)$$

$-4\ \ +1$

$$= \qquad = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-4)$$

K. degerler $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 4$

$\lambda_1 = 1$ icin öz vektor

$$(\lambda_1 I - A)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -6x_1 \\ 4x_1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = -1$ icin öz vektor $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\lambda_3 = 4$ icin öz vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

olup

$D=P^{-1}.A.P$ köşegen matristir.. P^{-1} ters matrisi bulunup yazılırsa

$$D=\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 6 & -3 & -6 \\ 12 & 14 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

SORU 5)

a) Cayley-Hamilton Teoremi: Her matris kendi karakteristik polinomunun bir köküdür

Cayley-Hamilton teoremini kullanarak bir matrisin tersini hesaplamak mümkündür

Teoremin bir başka uygulaması da bir kare matrisin büyük kuvvetlerini rahatlıkla hesaplamaktır

b) $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}^{99} = ?$ $\Rightarrow$ $A = PD.P^{-1} \Rightarrow A^k = P.D^kP^{-1}$ idi

O halde,

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+3 & -2 \\ 4 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda-3)+8=0$$

$$\lambda^2 - 9 + 8 = 0$$

$$\lambda^2 = 1 \quad \lambda = \pm 1$$

$\lambda_1 = 1$ için öz vektörler

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 = x_2 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$$

$x_1 = a$ için $= a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $a \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 = -1$ için öz vektör

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x_1 = a$ $a \in \mathbb{R}$ için

$$A = P.D.P^{-1} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{\cancel{100}\,99} = P \cdot D^{\cancel{100}\,99} \cdot P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1^{\cancel{100}\,99} & 0 \\ 0 & (-1)^{\cancel{100}\,99} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

SORU 6: A köşegenleştirilebilir olsun. O halde

$$P^{-1}AP = D$$ köşegen matris olacak şekilde

tersi var olan P matrisi vardır.

Buradan

$$(P^{-1}AP)^T = P^T A^T (P^{-1})^T = P^T A^T (P^T)^{-1} = D^T = D$$

dır. P terslenebilir olduğu için P^T nin de tersi vardır.

Dolayısıyla A^T matrisi de köşegenleştirilebilirdir.