

2020-2021 ÖĞRETİM YILI BAHAR YARIYILI
OLASILIK VE İSTATİSTİK DERSİ FİNAL SINAV SORULARI VE CEVAPLARI

SORU.

Y rasgele değişkeniyle ilgili

$$f(y) = \begin{cases} cy^2 & , 0 < y < 1 \\ c(2-y) & , 1 < y < 2 \end{cases}$$

fonsiyonunun, olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için c sabitinin değerini bulunuz.

Cevap. Olasılık yoğunluk fonksiyonu olma özelliğinden, $c = \frac{6}{5}$ bulunur.

SORU.

A, B, C, gibi 12 nokta aynı düzlemde, herhangi üçü bir doğru üzerinde bulunmayacak şekilde verilmiştir. Bu doğrulardan kaç tanesi A noktasından geçer?

Cevap.

A noktası hariç tutulursa geriye 11 nokta kalır. Bu noktaların her biri ile A noktası bir doğru belirler. O halde A noktasından geçen doğruların sayısı 11 dir.

SORU. Bir düzgün zar 7 kez atılmıştır. 3'e kalansız bölünen sayıların üste gelen yüzde en az 3 kez gelmesi(görülmesi) olasılığı nedir?

Cevap.

Bir atışta 3'e kalansız bölünen bir sayının gelme olasılığı $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Bu bir Bernoulli denemesidir.

Zar 7 kez atılmış. Yani Bernoulli denemesi tekrarlanmış. Bu durumda Binom dağılımı aklımıza gelecek. $n = 7$, $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$

X: Zar atışında üste gelen yüzde 3'e kalansız bölünen sayıların görülme sayısı

$$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{7}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{7-x} & , x = 0, 1, 2, \dots, 7 \\ 0 & , \text{diğer } d. \end{cases}$$

İstenen olasılık : $P(X \geq 3)$ tür.

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] \\ &= 1 - \left[\binom{7}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{7-0} + \binom{7}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^{7-1} + \binom{7}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{7-2} \right] = 0.4293 \end{aligned}$$

SORU.

Bir kişi hedefe n tane bağımsız atış yapıyor. Hedefin bir atışta vurulma olasılığı p , vuruşların beklenen değeri 16 ve varyansı 3.2 dir. n ve p değerlerini bulunuz.

Cevap.

$$X : \text{Hedefin vurulma sayısı} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

Hedefin bir atışta vurulma olasılığı p , vurulmama olasılığı $1 - p = q$

$$E(X) = 16 \quad , \quad Var(X) = 3.2$$

X rasgele değişkeni Binom dağılımına sahiptir.

Binom dağılımının ortalaması ve varyansı; $E(X) = np$, $Var(X) = npq$ olup,

$$E(X) = np = 16$$

$$Var(X) = npq = 3.2 \Rightarrow 16q = 3.2 \Rightarrow q = 0.2 \quad , \quad p = 0.8$$

$$np = 16 \Rightarrow n = 20$$

SORU. İçerisinde 3 kırmızı, 4 siyah ve 3 yeşil top bulunan bir kavanozdan yerine konulmaksızın 3 top çekiliyor. Bunlardan iki tanesinin yeşil top olması olasılığını bulunuz.

Cevap.

X : Çekilen yeşil top sayısı , $x = 0, 1, 2, 3$

Kavanozda $N = 10$ top var. Bunları yeşil ve yeşil olmayan diye gruplarsak X rasgele değişkeni $a = 3$ (istenen özelliğe sahip) ve $N - a = 7$ olan hipergeometrik dağılıma sahip olur. Üç top çekildiğinden $n = 3$ tür.

$$P(X = x) = \frac{\binom{a}{x} \binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}} , x = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2} \binom{10-3}{3-2}}{\binom{10}{3}} = \frac{21}{120} = 0.175$$

SORU. Bir zarın 4 elde edilinceye kadar atıldığı bir deneyde, ilk 4 sayısının dördüncü atışta gelmesi olasılığı kaçtır?

Cevap. X : 4 sayısının elde edilmesi için gereken atışların sayısı , $x = 1, 2, \dots$

Başarı olasılığı, $p = \frac{1}{6}$ dir, ilk başarıdan söz ediliyor, X geometrik dağılıma sahiptir.

$$P(X = x) = \begin{cases} pq^{x-1} & , x = 1, 2, \dots \\ 0 & , \text{diğer } d. \end{cases}$$

$$P(X = x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} & , x = 1, 2, \dots \\ 0 & , \text{diğer } d. \end{cases}$$

olur.

$$P(X = 4) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{4-1} = \frac{125}{1296} = 0.09645$$

SORU.

X rasgele değişkeni M parametrelili Poisson dağılımlına sahip ise $Y = 3X + 5$ rasgele değişkeninin beklenen değerini bulunuz.

Cevap. Poisson dağılımlında, $E(X) = M$, $Var(X) = M$ dir.

$$E(Y) = E(3X + 5) = 3E(X) + 5 = 3M + 5$$

SORU. X rasgele değişkeni, ortalaması 1200 ve standart sapması 50 olan normal dağılıma sahip ise $P(X < 1100) = ?$

Cevap. $X \sim N(1200, 2500)$, $z = \frac{X - \mu}{\sigma} \Rightarrow$

$$P(X < 1100) = P\left(z < \frac{1100 - 1200}{50}\right) = P(z < -2) = 0.0228$$

SORU.

X rasgele değişkeni $1/3$ parametrelili üstel dağılıma sahip olduğunda, $Y = 5X + 3$ rasgele değişkeninin varyansı kaç olur?

Cevap. Üstel dağılımın parametresi λ dir. $\lambda = 1/3$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} , & x > 0 , \lambda > 0 \\ 0 , & \text{diğer d.} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} , & x > 0 \\ 0 , & \text{diğer d.} \end{cases}$$

X rasgele değişkeni üstel dağılıma sahipse, $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 3$, $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 9$ olup,

$Y = 5X + 3$ ise $Var(Y) = 25Var(X) = 25(9) = 225$ elde edilir.

SORU.

Hilesiz bir madeni para devamlı atılarak deney yapılıyor ve toplam 2 kez tura geldiğinde deney bitiriliyor. Buna göre deneyin, paranın **4. kez atıldığında** bitme olasılığı kaçtır?

Cevap.

$$S = \{TT, YTT, TYT, YTTT, YTYT, TYYT, YYYTT, YYTYT, \dots \dots \}$$

X: Toplam 2 kez Tura gelinceye kadar yapılan atış sayısı

$$x = 2, 3, 4, \dots$$

$$P(X=2) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$$

$$P(X=4) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

SORU.

$X \sim N(3,4)$ gösterimi ne anlam ifade etmektedir? YAZINIZ.

Cevap. X sürekli rasgele değişkeni; 3 ortalamalı, 4 varyanslı normal dağılıma sahiptir.