2023-2024 Eğitim Öğretim Yılı - MAT 312 Nümerik Analize Giriş Finali

1. $f(x) = x^2 - 3$ fonksiyonunun $[1, 2]$ aralığında ki kökünü Bolzana'nın ikiye bölme (yarılama) yöntemi ile 4 iterasyonda virgülden sonra 4 basamak alarak yaklaşık olarak bulunuz.

2. $f(x)$ fonksiyonu $0, 1, 3$ değerlerine karşılık sırasıyla $-1, 2, 14$ değerlerini alsın. Buna göre Newton interpolasyon polinomunu kurup $x = 2$ noktasında ki fonksiyonun değerini hesaplayınız.

3. $(1, 4), (2, 1), (3, 7), (5, 2), (6, 6)$ noktalarının arasından geçen en uygun fonksiyonu en küçük kareler doğrusu ile virgülden sonra 2 basamak alarak bulunuz.

4. $f(x_0)$ fonksiyonun ikinci mertebeden türevini yaklaşık olarak veren ileri fark formülünü ikinci mertebeden hata ve dört noktada tanımla olmak kaydıyla oluşturunuz.

Sınav süresi 90 dakikadır. Başarılar. 2.7.2024

CEVAPLAR

1) $f(x) = x^2 - 3$

$$r_n = \frac{a_n + b_n}{2} \cong \text{kök}$$

iterasyon	n	$a_n = x_{alt}$	$b_n = x_{üst}$	$r_n = \frac{a_n+b_n}{2}$	$f(x_{alt}) f(r_n) \overset{?}{<} 0$
1	0	1	2	1,5	−
2	1	1,5	2	1,75	+
3	2	1,5	1,75	1,625	−
4	3	1,625	1,75	1,6875	−

$r_n = 1,6875 \cong \text{kök}$

2)

x_i	y_i	1. bölünmüş fark	2. bölünmüş fark
0	$-1 = a_0$	$3 = a_1$	$1 = a_2$
1	2	6	
3	14		

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$
$$= -1 + 3x + x(x-1) = x^2 + 2x - 1$$

$$P_2(2) = 4 + 4 - 1 = 7$$

3)

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
	1	4	1	4
	2	1	4	2
	3	7	9	21
	5	2	25	10
	6	6	36	36
Toplam	17	20	$75 = S_{xx}$	$73 = S_{xy}$
Ort	3.4	4		

$$y = a_0 + a_1 x$$

$$a_1 = \frac{S_{xy} - n\bar{x}\bar{y}}{S_{xx} - n\bar{x}^2} = \frac{73 - 5.3{,}4.4}{75 - 5.3{,}4^2} = 0{,}29$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1\bar{x} = 4 - 0{,}29 \cdot 3{,}4 = 3{,}01$$

$$y = 3{,}01 + 0{,}29x$$

4) $f''(x_0) \approx a f(x_0) + b f(x_0+h) + c f(x_0+2h) + d f(x_0+3h)$

$$= a f(x_0) + b\left[f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + O(h^4)\right]$$

$$+ c\left[f(x_0) + 2h f'(x_0) + \frac{4h^2}{2} f''(x_0) + \frac{8h^3}{6} f'''(x_0) + O(h^4)\right]$$

$$+ d\left[f(x_0) + 3h f'(x_0) + \frac{9h^2}{2} f''(x_0) + \frac{27h^3}{6} f'''(x_0) + O(h^4)\right]$$

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ b+2c+3d=0 \\ b+4c+9d=\frac{2}{h^2} \\ b+8c+27d=0 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{2}{h^2},\ b=-\frac{5}{h^2},\ c=\frac{4}{h^2},\ d=-\frac{1}{h^2}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{h^2}$$