T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN FAKÜLTESİ
MAT312 – NÜMERİK ANALİZE GİRİŞ
2025–2026 Bahar Dönemi Bütünleme Sınavı — CEVAP ANAHTARI
27.06.2026

---

1. a. $x_{n+1} = g(x_n)$ sabit nokta iterasyonunun bir köke yakınsaması için g fonksiyonunun sağlaması gereken koşulu ifade ediniz. (5 puan)

   Çözüm. Kökü α içeren bir aralıkta g sürekli türevli ve bu aralıktaki her x için $|g'(x)| \le k < 1$ olmalıdır (yerel koşul: $|g'(\alpha)| < 1$).

   b. $f(x) = x^2 - x - 1 = 0$ denklemi veriliyor. Bu denklemi $x = g(x)$ biçiminde üç farklı şekilde yazınız. $x_0 = 1.5$ civarında her biri için $|g'(x_0)|$ değerini hesaplayarak hangilerinin yakınsayacağını, hangisinin ıraksayacağını belirleyiniz. (5 puan)

   Çözüm. Üç düzenleme: $g_1(x) = \sqrt{x+1}, \quad g_2(x) = 1 + \dfrac{1}{x}, \quad g_3(x) = x^2 - 1.$

$$
\begin{aligned}
|g_1'(1.5)| &= \frac{1}{2\sqrt{2.5}} = 0.3162 < 1 \quad \text{(yakınsar)},\\
|g_2'(1.5)| &= \frac{1}{2.25} = 0.4444 < 1 \quad \text{(yakınsar)},\\
|g_3'(1.5)| &= 2(1.5) = 3 > 1 \quad \text{(ıraksar)}.
\end{aligned}
$$

   En küçük $|g'|$ değerine sahip g_1 en hızlı yakınsar. (Farklı ama geçerli formlar da kabul edilir.)

   c. $(n+1)$ adet veri noktası $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ için Lagrange temel polinomu $L_i(x)$'i tanımlayınız ve $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ ($i = j$ iken 1, $i \ne j$ iken 0) özelliğini gösteriniz. (10 puan)

   Çözüm. Tanım:

$$
L_i(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\ne i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.
$$

   $x = x_j$ konulduğunda: $j = i$ ise her çarpan $\dfrac{x_i - x_k}{x_i - x_k} = 1$ olur, dolayısıyla $L_i(x_i) = 1$; $j \ne i$ ise payda $k = j$ çarpanı $(x_j - x_j) = 0$ olur, dolayısıyla $L_i(x_j) = 0$. Böylece $L_i(x_j) = \delta_{ij}$.

2. $f(x) = e^x - 3x = 0$ denkleminin $[0, 1]$ aralığındaki kökü aranacaktır.

   a. Bu aralıkta bir kök bulunduğunu gösteriniz. (4 puan)

   Çözüm. $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = e - 3 = -0.28172 < 0$; f sürekli ve $f(0)f(1) < 0$ olduğundan Ara Değer Teoremi gereği $[0, 1]$'de bir kök vardır. ($f'(x) = e^x - 3$ aralıkta işaret değiştirmediğinden kök tektir.)

   b. İkiye bölme yöntemini dört iterasyon uygulayınız; her adımda kökü içeren aralığı belirtip dördüncü adım sonundaki hata üst sınırını veriniz. (8 puan)

   Çözüm.

Adım	c_n	$f(c_n)$	Yeni aralık
1	0.50000	+0.14872	[0.5, 1]
2	0.75000	−0.13300	[0.5, 0.75]
3	0.62500	−0.00675	[0.5, 0.625]
4	0.56250	+0.06755	[0.5625, 0.625]

Dört adım sonunda kök [0.5625, 0.625] aralığındadır.

c. Denklemi sabit nokta iterasyonu $x_{n+1} = g(x_n)$ ile çözünüz; $x_0 = 0.5$ ile dört iterasyon yapınız (virgülden sonra beş basamak). (8 puan)

Çözüm. Uygun düzenleme: $e^x = 3x \Rightarrow x = \dfrac{e^x}{3}$, yani $g(x) = \dfrac{e^x}{3}$, $g'(x) = \dfrac{e^x}{3}$. Kökte $|g'(\alpha)| = \dfrac{e^\alpha}{3} = \alpha \approx 0.619 < 1$ olduğundan yakınsar. ($x = \ln(3x)$ seçilseydi $|g'| = 1/\alpha > 1$ ile ıraksardı.)

$$x_1 = \frac{e^{0.5}}{3} = 0.54957, \quad x_2 = 0.57750, \quad x_3 = 0.59386, \quad x_4 = 0.60366.$$

d. Newton–Raphson yöntemini $x_0 = 0$ ile dört iterasyon uygulayınız (virgülden sonra beş basamak). (8 puan)

Çözüm. $f'(x) = e^x - 3, \quad x_{i+1} = x_i - \dfrac{e^{x_i} - 3x_i}{e^{x_i} - 3}$:

$$x_1 = 0.50000, \quad x_2 = 0.61006, \quad x_3 = 0.61900, \quad x_4 = 0.61906.$$

e. Üç yöntemin sonuçlarını bir tabloda karşılaştırıp hangisinin en hızlı yakınsadığını gerekçesiyle belirtiniz. (2 puan)

Çözüm. Gerçek kök $\alpha \approx 0.61906$.

n	Bisection	Newton–Raphson	Sabit Nokta
1	0.50000	0.50000	0.54957
2	0.75000	0.61006	0.57750
3	0.62500	0.61900	0.59386
4	0.56250	0.61906	0.60366

Newton–Raphson kuadratik yakınsamayla 3. adımda kökü beş basamak yakalar (en hızlı). Sabit nokta lineer ve tek yönlü (yavaş); Bisection istikrarlı ama yavaştır.

3. Aşağıda verilen doğrusal denklem sistemini Gauss–Jordan metodunu kullanarak çözünüz ve çözüm kümesini bulunuz. (20 puan)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Çözüm. $[A\,|\,b]$ üzerinde elementer satır işlemleri uygulanır. Önce 1. sütun temizlenir ($R_2 - 2R_1,\ R_3 - R_1,\ R_4 - 3R_1$):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 10 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & -5 & -1 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

2. sütun (pivot 1 yapılıp R_1, R_3, R_4 temizlenir), ardından 3. sütun:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 7 & 18 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 10 & -10 & -20 \\ 0 & 0 & 14 & -19 & -43 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right]$$

Son olarak 4. sütun ($R_4/(-5)$, sonra R_1, R_2, R_3 temizlenir):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 3.$$

Sağlama (1. denklem): $2 + 2(-1) + 1 - 3 = -2$ ✓

4. Aşağıda verilen simetrik matrisin Cholesky ayrıştırmasını bulunuz. (15 puan)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 10 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 14 & -3 \\ 4 & 5 & -3 & 22 \end{pmatrix}$$

Çözüm. $l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k<i} l_{ik}^2}$, $\quad l_{ij} = \dfrac{1}{l_{jj}}\Big(a_{ij} - \sum_{k<j} l_{ik} l_{jk}\Big)$ $(i > j)$ formülleriyle sütun sütun:

1. sütun: $l_{11} = \sqrt{4} = 2$; $\quad l_{21} = \frac{2}{2} = 1,\ l_{31} = \frac{-2}{2} = -1,\ l_{41} = \frac{4}{2} = 2.$
2. sütun: $l_{22} = \sqrt{10 - 1^2} = 3$; $\quad l_{32} = \frac{5-(-1)(1)}{3} = 2,\ l_{42} = \frac{5-(2)(1)}{3} = 1.$
3. sütun: $l_{33} = \sqrt{14 - (-1)^2 - 2^2} = \sqrt{9} = 3$; $\quad l_{43} = \frac{-3-(2)(-1)-(1)(2)}{3} = -1.$
4. sütun: $l_{44} = \sqrt{22 - 2^2 - 1^2 - (-1)^2} = \sqrt{16} = 4.$

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

A simetrik ve pozitif tanımlı olduğundan ayrıştırma tek bir alt üçgensel L ile elde edilir. Sağlama: $LL^T = A$ ✓

5. $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun bazı değerleri kullanılarak Neville metodu ile $f(7)$ değerine yaklaşımda bulunulmak istenmektedir.

   a. Aşağıda verilen tablodaki A, B, C, D, E, F değerlerini bulunuz. (10 puan)

i	x_i	$Q_{i,0}$	$Q_{i,1}$	$Q_{i,2}$	$Q_{i,3}$
0	1	1			
1	4	2	A		
2	9	3	B	D	
3	16	4	C	E	F

Çözüm. Bağıntı: $Q_{i,j} = \dfrac{(x - x_{i-j})\, Q_{i,j-1} - (x - x_i)\, Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$, $x = 7$.

$$
\begin{aligned}
A = Q_{1,1} &= \frac{6(2) - 3(1)}{3} = 3.0000,\\
B = Q_{2,1} &= \frac{3(3) - (-2)(2)}{5} = 2.6000,\\
C = Q_{3,1} &= \frac{(-2)(4) - (-9)(3)}{7} = \frac{19}{7} = 2.7143,\\
D = Q_{2,2} &= \frac{6(2.6) - (-2)(3)}{8} = \frac{21.6}{8} = 2.7000,\\
E = Q_{3,2} &= \frac{3(2.7143) - (-9)(2.6)}{12} = 2.6286,\\
F = Q_{3,3} &= \frac{6(2.6286) - (-9)(2.7)}{15} = \frac{40.0714}{15} = 2.6714.
\end{aligned}
$$

b. Elde ettiğiniz F değerini fonksiyonun gerçek değeri ile karşılaştırarak mutlak hatasını hesaplayınız. Ayrıca D ve F yaklaşımlarının mutlak hatalarını kıyaslayıp, kullanılan nokta sayısı arttıkça ne gözlemlendiğini yorumlayınız. (5 puan)

Çözüm. Gerçek değer $\sqrt{7} = 2.64575$.

$$
\begin{aligned}
|\sqrt{7} - F| &= |2.64575 - 2.6714| = 0.0257,\\
|\sqrt{7} - D| &= |2.64575 - 2.7000| = 0.0542.
\end{aligned}
$$

Kullanılan nokta sayısı (polinom derecesi) arttıkça yaklaşım gerçek değere yaklaşmıştır: 3. derece yaklaşım F'nin hatası, 2. derece yaklaşım D'nin hatasının yaklaşık yarısıdır.

Başarılar dilerim.

Prof. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU