Adı Soyadı:
Numarası:

1	***2***	***3***	***4***	***5***	***Toplam***

MAT478 ÖKLİDYEN OLMAYAN GEOMETRİ FİNAL SINAVI (25.06.2024)

<u>Soru1</u>: IL^2 de A(u) dönme matrisine karşılık gelen

$$A: IL^2 \to IL^2$$

lineer dönüşümünün iki nokta arasındaki uzaklığı koruduğunu gösteriniz.

<u>Soru 2</u>: P_3' ün

$S=\{v_1=-x^3-1,\quad v_2=-x-1,\ v_3=-x^2-x-2,\ v_4=-x^3+3x-1,\quad v_5=-x^3-x^2-2x-1\}$

alt kümesi ile gerilen alt uzayı W olsun.

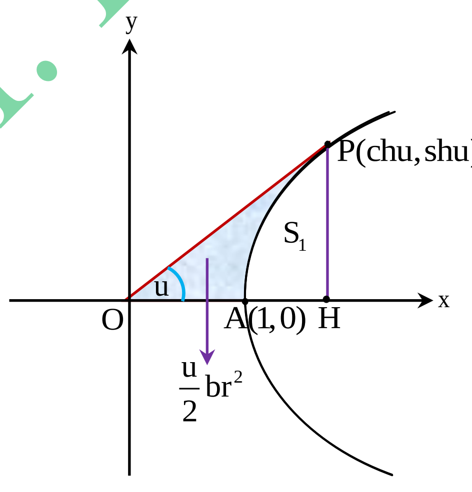
a) W alt uzayının bir tabanını bulunuz**(10 P.)**

b) W alt uzayının tabanını kapsayan P_3 ün bir tabanını bulunuz**(10 P.)**

<u>Soru3</u>: Euclid düzleminde hareketli A, E ve sabit E' düzlemleri verilmiş olsun. Bu durumda E/E' hareketinin P pol noktası, A/E hareketinin Q pol noktası ve A/E' hareketinin Q' pol noktasının lineer bağımlı olup-olmadıklarını araştırınız. Eğer lineer bağımlı ise aralarındaki bağıntıyı bulunuz**(20 P.)**

<u>Soru 4:</u> A(lnu) matrisi yardımı ile $\vec{e}_1=(1,0)$, $\vec{e}_2=(0,1)$ birbirine dik olan iki vektörün $u=\ln 3$ kadar dönmeden sonra alacağı yeni konumlarını bulunuz ve dönmeden sonraki birbirlerine göre durumları ve boyları hakkında yorumu yapınız. $P(1,1)$ noktasının $A(ln3)$ dönme matrisi altında alacağı yeni konuma bakıp, geometrik yorumunu yapınız.

<u>Soru 5</u>: $x^2-y^2=1$ Lorentz çemberi üzerindeki P noktasının koordinatları için kullanılan hiperbolik radyan açı u olmak üzere taralı bölgenin alanının $\frac{u}{2}br^2$ olduğunu gösteriniz.



<u>NOT</u>: Süre 100 dakikadır.

Prof. Dr. Ayhan TUTAR

Prof. Dr. Ayhan TUTAR

CEVAPLAR

CEVAP 1) $x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)$ $\mathbb{L}^2$ de iki nokta olsun.

$$\overrightarrow{xy}=(y_1-x_1,y_2-x_2)$$

olur.

$$d(x,y)=\|\overrightarrow{xy}\|=|(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2|^{1/2}$$

dir. Diğer taraftan,

$$\overrightarrow{\mathcal{A}(u)x}=(x_1chu+x_2shu,x_1shu+x_2chu),$$
$$\overrightarrow{\mathcal{A}(u)y}=(y_1chu+y_2shu,y_1shu+y_2chu)$$

dır. Buna göre,

$$\begin{aligned}
d\left(\overrightarrow{\mathcal{A}(u)x},\overrightarrow{\mathcal{A}(u)y}\right)&=\left\|\overrightarrow{\mathcal{A}(u)x\mathcal{A}(u)y}\right\|\\
&=\|((y_1-x_1)chu+(y_2-x_2)shu),((y_1-x_1)shu+(y_2-x_2)chu))\|\\
&=|(y_1-x_1)^2ch^2u+(y_2-x_2)^2sh^2u+2(y_1-x_1)(y_2-x_2)shuchu\\
&\quad-(y_1-x_1)^2sh^2u-(y_2-x_2)^2ch^2u-2(y_1-x_1)(y_2-x_2)shuchu|^{1/2}\\
&=\left|(y_1-x_1)^2\underbrace{(ch^2u-sh^2u)}_{1}-(y_2-x_2)^2\underbrace{(ch^2u-sh^2u)}_{1}\right|^{1/2}\\
&=|(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2|^{1/2}\\
&=\|\overrightarrow{xy}\|\\
&=d(x,y)
\end{aligned}$$

dir.

Prof. Dr. Ayhan TUTAR

CEVAP 2)

a) P_3 uzayı ile $\mathbb{R}_1^4$ uzayı

$$f: \quad P_3 \rightarrow \mathbb{R}_1^4$$
$$v = ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow f(v) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

fonksiyonu altında izomorf olduklarından(boyutları eşit olduklarından) W alt uzayının f altındaki görüntüsü $V = f(W)$, $\mathbb{R}_1^4$ in $\{f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4), f(v_5)\}$ alt kümesi ile gerilmiştir. Bu alt uzayın bir tabanını bulursak taban vektörlerinin f^{-1} altındaki görüntüleri W nın tabanını oluşturur. V alt uzayı

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$ matrisinin sütun uzayıdır. A matrisine elamanter satır

işlemleri uygularsak

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$ matrisine satırca denk olduğu görülür. O halde V nin bir

tabanı olarak

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$ ve bunların f^{-1} altındaki görüntülerinden oluşan

$T = \{v_1 = -x^3 - 1, \quad v_2 = -x - 1, -v_3 = -x^2 - x - 2, v_4 = -x^3 + 3x - 1\}$ kümesi de W alt uzayının bir tabanıdır. Açık olarak,

$2v_1 - 2v_2 + v_3 - v_4 = -x^3 - x^2 - 2x - 1 = v_5$ dir.

b) W alt uzayının boyutu 4 olduğundan, W alt uzayının tabanını kapsayan P_3' ün bir tabanı olarak T kümesinin kendisini alabiliriz. Çünkü, boy P_3 =Boy $W = 4$ dür.

Prof. Dr. Ayhan TUTAR

CEVAP 3) $P(p_1\,,p_2)=\left(\frac{\sigma_2'-\sigma_2}{\tau-\tau'},\ \frac{\sigma_1'-\sigma_1}{\tau-\tau'}\right),$

$Q(q_1\,,q_2)=\left(-\frac{\sigma_2}{\tau},\ -\frac{\sigma_1}{\tau}\right),$

$Q'(q_1'\,,q_2')=\left(-\frac{\sigma_2'}{\tau'},\ -\frac{\sigma_1'}{\tau'}\right)$ olduğunu biliyoruz.

$$p_2=\frac{\sigma_1'-\sigma_1}{\tau-\tau'}\Rightarrow(\tau-\tau')p_2-\sigma_1'+\sigma_1=0\qquad\cdots\ (1)$$

elde edilir.

$q_2=-\frac{\sigma_1}{\tau}\Rightarrow\sigma_1=-q_2\tau$ ve $q_2'=-\frac{\sigma_1'}{\tau'}\Rightarrow-\sigma_1'=q_2'\tau'$ bulunur.

σ_1 ve $-\sigma_1'$ değerleri (1) ifadesinde yerlerine yazılırsa,

$(\tau-\tau')p_2+\tau'q_2'-\tau q_2=0\Rightarrow\ (\tau-\tau')p_2-\tau q_2+\tau'q_2'=0\ \cdots\ (*)$

bulunur. Aynı şekilde,

$$p_1=\frac{\sigma_2'-\sigma_2}{\tau-\tau'}\ \text{dan}\ (\tau-\tau')p_1-\sigma_2'+\sigma_2=0\qquad\cdots\ (2)$$

elde edilir.

$q_1=-\frac{\sigma_2}{\tau}\Rightarrow\sigma_2=-q_1\tau$ ve $q_1'=-\frac{\sigma_2'}{\tau'}\Rightarrow-\sigma_2'=q_1'\tau'$ bulunur. Bulunan σ_2 ve $-\sigma_2'$ değerleri (2) ifadesinde yerlerine yazılırsa,

$(\tau-\tau')p_1-q_1\tau+\tau'q_1'=0\Rightarrow\ (\tau-\tau')p_1-\tau q_1+\tau'q_1'=0\ \cdots\ (**)$

elde edilir.

$(*)$ ve $(**)$ dan

$$(\tau-\tau')P-\tau Q+\tau'Q'=0$$

yazabiliriz. Bu ise P,Q ve Q' pol noktalarının lineer bağımlı olması demektir. Yani, bu noktalar aynı bir doğru üzerindedirler.

Prof. Dr. Ayhan TUTAR

CEVAP 4)

$$<\vec{e_1},\vec{e_2}>=<(1,0),(0,1)>=0,$$
$$\|\vec{e_1}\|=\sqrt{|<(1,0),(1,0)>|}=1,$$
$$\|\vec{e_2}\|=\sqrt{|<(0,1),(0,1)>|}=1$$

dir.

$$u=ln3 \Rightarrow chu=\tfrac{1}{2}(e^{ln3}+e^{-ln3})=\tfrac{1}{2}\left(3+\tfrac{1}{3}\right)=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{10}{3}\right)=\tfrac{5}{3},$$

$$sh(ln3)=\frac{1}{2}(e^{ln3}-e^{-ln3})=\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{4}{3}\text{den}$$

$$\mathcal{A}(ln3)=\begin{bmatrix} ch(ln3) & sh(ln3) \\ sh(ln3) & ch(ln3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5/3 & 4/3 \\ 4/3 & 5/3\end{bmatrix}$$ elde edilir.

$$\big(\mathcal{A}(ln3)\big)\vec{e_1}=\begin{bmatrix} 5/3 & 4/3 \\ 4/3 & 5/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5/3 \\ 4/3\end{bmatrix}$$

ve

$$\big(\mathcal{A}(ln3)\big)\vec{e_2}=\begin{bmatrix} 5/3 & 4/3 \\ 4/3 & 5/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4/3 \\ 5/3\end{bmatrix}$$

bulunur.

Lorentz anlamında $u=ln3$ hiperbolik radyanlık dönmeden sonra $\big(\mathcal{A}(ln3)\big)\vec{e_1}$ ve $\big(\mathcal{A}(ln3)\big)\vec{e_2}$ vektörleri için

$$<\big(\mathcal{A}(ln3)\big)\vec{e_1},\big(\mathcal{A}(ln3)\big)\vec{e_2}>=\tfrac{20}{9}-\tfrac{20}{9}=0,$$

$$\left\|\big(\mathcal{A}(ln3)\big)\vec{e_1}\right\|=\sqrt{\frac{25-16}{9}}=1,$$

$$\left\|\big(\mathcal{A}(ln4)\big)\vec{e_2}\right\|=\sqrt{\left|\frac{16-25}{9}\right|}=1$$

dir. Buna göre; $u=ln3$ hiperbolik radyanlık dönmeden sonra $\big(\mathcal{A}(ln3)\big)\vec{e_1}$ ve $\big(\mathcal{A}(ln3)\big)\vec{e_2}$ vektörleri birbirlerine yine diktir ve her bir vektörün boyu korunmuş olur.

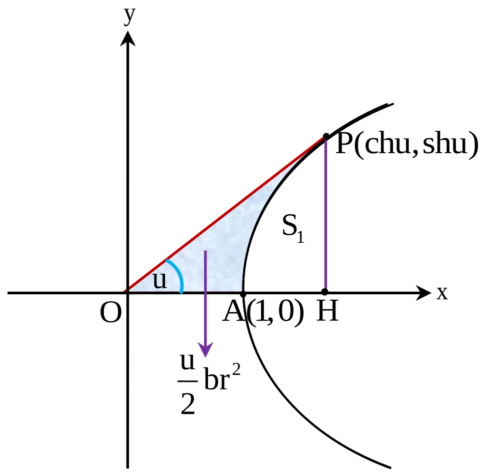
Şimdi ise $P(1,1)$ noktasının $A(ln3)$ dönme matrisi altında alacağı yeni konuma bakalım:

$$\big(\mathcal{A}(ln3)\big)\begin{bmatrix} 1 \\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5/3 & 4/3 \\ 4/3 & 5/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 3\end{bmatrix}$$

olur. Böylece IL^2 de $u=ln3$ hiperbolik radyanlık dönmeden sonra $P(1,1)$ noktası merkezden(orijinden) uzaklaşmış olur.

Prof. Dr. Ayhan TUTAR

CEVAP 5)



Toplam alanımız A olsun. Toplam alan üçgenin alanı olup;

$$A = \frac{|OH||PH|}{2} = \frac{1}{2} chu.shu \text{ olur.}$$

Şimdi S_1 in alanını bulalım:

$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = x^2 - 1 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 - 1}$ dir.

$$S_1 = \int_1^{chu} y dx = \int_1^{chu} \sqrt{x^2 - 1} dx = \left(\frac{1}{2} x.\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|\right) \Big|_1^{chu}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} chu.\sqrt{\underbrace{ch^2u - 1}_{sh^2u}} - \frac{1}{2} ln\left|chu + \sqrt{\underbrace{ch^2u - 1}_{sh^2u}}\right| - 0$$

$$S_1 = \frac{1}{2} chu.shu - \frac{1}{2} ln|chu + shu| \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (*)$$

$shu = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$ ve $shu = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$ olduğundan $chu + shu = \frac{e^u - e^{-u} + e^u + e^{-u}}{2} = e^u$ elde edilir.

Bu değer $(*)$ ifadesinde yerine yazılırsa

$S_1 = \frac{1}{2} chu.shu - \frac{1}{2} ln|e^u| = \frac{1}{2} chu.shu - \frac{1}{2} u$ bulunur. Buna göre, istenen alan

$S = A - S_1 = \frac{1}{2} chu.shu - \frac{1}{2} chu.shu + \frac{1}{2} u$

$S = \frac{1}{2} u \ br^2$ dir.

Prof. Dr. Ayhan TUTAR