Öklidyen Olmayan Geometri Bütünleme Sınavı Cevap Anahtarı   25.06.2026

NOT: Her soru 20 puan olup süre 90 dakikadır. Başarılar dilerim.

1) S^2 küresel geometrisi ve H^2 hiperbolik düzlemi için farklı olan iki özellik yazınız.

2) S^2 de $X=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\in S^2$ noktası ve $h=(1,0,0)$ kutuplu m doğrusu veriliyor.

a) X noktasının m doğrusuna göre yansıması olan Q noktasını bulunuz.

b) X ve Q noktalarından geçen $\overleftrightarrow{XQ}$ doğrusunu bulunuz.

3) H^2 de kutbu $h=(1,0,0)$ olan m doğrusu ve bu doğru üzerinde olmayan $P=(-2,-2,3)\in H^2$ noktası veriliyor. P noktasından geçen ve m doğrusunu kesen bir doğru bulunuz.

4) S^2 de $h=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ kutuplu m doğrusunu dik kesen bir doğru bulunuz.

5) H^2 de ultraparalel iki doğrunun kesişmediğini gösteriniz.

CEVAPLAR

1) S^2 de paralel doğrular yoktur. H^2 de ise kesişmeyen paralel ve ultraparalel doğrular vardır.

S^2 de bir doğruya dışındaki bir noktadan paralel çizilemezken H^2 de birden fazla paralel çizilebilir.

S^2 de bir üçgenin iç açıları toplamı $180°$ den büyük iken H^2 de $180°$ den küçüktür.

S^2 de doğruların uzunluğu sonlu iken H^2 de sonsuzdur.

S^2 de doğrular iki noktada kesişirken H^2 de kesişen doğrular tek noktada kesişir.

2) a) $\langle X, h\rangle = \langle (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (1,0,0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$Q = \Omega_M X = X - 2\langle X, h\rangle h = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) - (\frac{2}{\sqrt{3}}, 0, 0) = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

b) $\overleftrightarrow{XQ}$ doğrusunun kutbu k olsun.

$X, Q \in \overleftrightarrow{XQ} \iff \langle X, k\rangle = \langle Q, k\rangle = 0 \iff k = \lambda(X \times Q), \lambda \in \mathbb{R}$

$$X \times Q = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{vmatrix} = (0, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

$k \in S^2 \iff |k| = 1 \iff k = \mp \frac{X \times Q}{|X \times Q|}$

$|X \times Q| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow k = \frac{3}{2\sqrt{2}}(0, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{XQ}$ doğrusu $k = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ kutuplu doğrudur.

3) Aranılan ℓ doğrusunun kutbu $k=(k_1,k_2,k_3)$ olsun.

k birim spacelike $\Leftrightarrow k_1^2+k_2^2-k_3^2=1 \quad \dots (1)$

$P\in\ell \Leftrightarrow b(P,k)=0 \Leftrightarrow b((-2,-2,3),(k_1,k_2,k_3))=0$

$\Leftrightarrow -2k_1-2k_2+3k_3=0 \quad \dots (2)$

$\ell\cap m \neq \emptyset \Leftrightarrow k\times h$ timelike

$$\Leftrightarrow k\times h=\begin{vmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(0,-k_3,-k_2) \text{ timelike}$$

$\Leftrightarrow k_3^2-k_2^2<0 \Leftrightarrow k_3^2<k_2^2 \quad \dots (3)$

(1), (2) ve (3) şartlarını sağlayan $k=(k_1,k_2,k_3)$ bulmalıyız.

$k_3=0$ için (2) den $k_2=-k_1$ olur ve (1) den

$2k_1^2=1 \Rightarrow k_1^2=\frac{1}{2} \Rightarrow k_1=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$ elde edilir.

$k=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ kutuplu ℓ doğrusu $P=(-2,-2,3)\in H^2$ noktasından geçer ve $h=(1,0,0)$ kutuplu m doğrusunu keser.

4) Aranılan ℓ doğrusunun kutbu $k=(k_1,k_2,k_3)$ olsun.

$k\in S^2 \Leftrightarrow k_1^2+k_2^2+k_3^2=1 \quad \dots (1)$

$\ell\perp m \Leftrightarrow \langle h,k\rangle=0 \Leftrightarrow \left\langle\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),(k_1,k_2,k_3)\right\rangle=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}k_1+\frac{1}{\sqrt{2}}k_3=0 \Leftrightarrow k_3=-k_1 \quad \dots (2)$

(1) de k_3 yerine $-k_1$ yazılırsa $2k_1^2+k_2^2=1$ elde edilir.

$k_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ alınırsa $2k_1^2 + k_2^2 = 1$ den $2k_1^2 + \frac{1}{3} = 1$

$\Leftrightarrow 2k_1^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow k_1^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow k_1 = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$

O halde $k = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ kutuplu ℓ doğrusu

m doğrusunu dik kesen bir doğrudur.

5) H^2 de ultraparalel ℓ ve m doğrularını alalım.
ℓ ve m doğrularının kutupları sırasıyla h_1 ve
h_2 olsun.

ℓ ve m ultraparalel $\Leftrightarrow h_1 \times h_2$ spacelike

$\ell \cap m \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. ve $\forall P \in \ell \cap m$
alalım.

$P \in \ell \cap m \Rightarrow P \in H^2 \Rightarrow P$, 3. bileşeni pozitif olan
birim timelike vektördür.

$P \in \ell \cap m \Rightarrow P \in \ell, m \Rightarrow b(P, h_1) = b(P, h_2) = 0 \Rightarrow P = \lambda(h_1 \times h_2)$

$h_1 \times h_2$ spacelike olup $\lambda \neq 0$ için $P = \lambda(h_1 \times h_2)$
de spacelike vektördür. Bu ise P nin timelike
vektör olması ile çelişir. O halde, $\ell \cap m \neq \emptyset$
kabulu yanlış olup ultraparalel ℓ ve m
doğruları kesişmez.