

1. soru	2. soru	3. soru	4. soru	5. soru	Toplam

Adı Soyadı:

06.01.2026

Numara:

MAT 469 ÖLÇÜM TEORİSİ DERSİ FİNAL SINAVI SORULARI

1) a) $(X, \mathcal{M}, \mu)$ bir ölçülebilir uzay ve $A \in \mathcal{M}$ verilsin. Her $E \in \mathcal{M}$ için $\mu_A(E) = \mu(A \cap E)$ olarak tanımlanan μ_A nın $\mathcal{M}$ üzerinde bir ölçü olduğunu gösteriniz.

b) $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ Borel ölçülebilir uzayı üzerindeki λ Lebesgue ölçümü göz önüne alınsın. $A = [0, 1]$

olmak üzere (a) şikkında verilen $\mu_A = \lambda_A$ ölçümüne göre $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1; & x \in (-\infty, 0) \\ 0; & x \in [0, 2) \\ 2; & x \in [2, \infty) \end{cases}$

fonksiyonu için $\int f d\lambda_A = ?$

c) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 1; & x \in (-\infty, 0) \\ 0; & x \in [0, \infty) \end{cases}$ ise $f = g$ λ_A - h.h.h midir? Neden?

2) $\mathbb{R}^3$ de $\mathcal{M} = \{E \subset \mathbb{R}^3 : (x, y, x) \in E \text{ ise } (y, x, y) \in E\}$ olarak tanımlanıyor.

a) $\mathcal{M}$ nin $\mathbb{R}^3$ de bir σ –cebiri olduğunu gösteriniz.

b) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x + y$ olarak tanımlanan f nin ölçülebilir bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

c) $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu(E) = \begin{cases} 1; & (0,0,0) \in E \\ 0; & (0,0,0) \notin E \end{cases}$ olarak tanımlanan μ nün $\mathcal{M}$ üzerinde bir ölçü(ölçüm) olduğunu gösteriniz.

3) a) Monoton yakınsaklık teoremini ifade ediniz. $\mathbb{R}$ üzerinde

$$f_n(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 0, \quad x \geq \frac{1}{n} \\ n^2; & 0 < x < \frac{1}{n} \end{cases}$$

olarak verilen (f_n) dizisinin $f_n \rightarrow f = 0$ μ - h.h.h yakınsadığını gösteriniz.

b) (f_n) dizisinin monoton yakınsaklık teoremini sağlamadığını gösteriniz. Neden teorem ile çelişmez, açıklayınız.

4) $\mathbb{R}$ deki λ Lebesgue ölçümünü kullanarak $\int_{[0,5]} \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor d\lambda$ integralini hesaplayınız.

5) $f = 0$ μ - h.h.h reel değerli f ölçülebilir fonksiyonu verilsin. O zaman $f \in L(X, \mathcal{M}, \mu)$ ve $\int f d\mu = 0$ olduğunu gösteriniz.

Not: 4. ve 5. sorular 10'ar puan, ilk 3 sorudaki her şık 10'ar puandır. Süre 110 dakikadır.

Prof. Dr. Birsen Sağır Duyar

1) a) $(X, \mathcal{M}, \mu)$ bir ölçülebilir uzay ve $A \in \mathcal{M}$ verilsin.
 (10) Her $E \in \mathcal{M}$ için $\mu_A(E) = \mu(A \cap E)$ olarak tanımlanan μ_A nin $\mathcal{M}$ üzerinde bir ölçü olduğunu gösteriniz.

b) $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ Borel ölçülebilir uzayı üzerindeki λ Lebesgue ölçümüne göre düşünülür.

$A = [0, 1]$ olmak üzere (a) şikkinde verilen $\mu_A = \lambda_A$ ölçümüne göre

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1; & x \in (-\infty, 0) \\ 0; & x \in [0, 2) \\ 2; & x \in [2, \infty) \end{cases} \quad \text{fonksiyonu için}$$

$$\int f d\lambda_A = ?$$

$$c) g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 1; & x \in (-\infty, 0) \\ 0; & x \in [0, \infty) \end{cases} \quad \text{ise}$$

(10) $f = g \lambda_A$ - h.h.h midir? Neden?

Çözüm: a) $\mu_A(\emptyset) = \mu(A \cap \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ (μ, m de ölçü olduğundan)

• $\forall E \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cap E \in \mathcal{M}$ ol. μ ölçü olduğundan

$$\mu_A(E) = \mu(A \cap E) \geq 0 \text{ ol.}$$

• $k \neq n$ için $E_k \cap E_n = \emptyset$ olmak üzere $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ ikiliği ayrık dizisini alalım. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mu_A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap E_n)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_A(E_n) \end{aligned}$$

($(A \cap E_n) \cap (A \cap E_k) = \emptyset$ ve μ ölçü olduğundan)

b) $f, 0, 1, 2$ sonlu değerleri aldığından basit fonksiyondur.

$$f(x) = 1 \cdot \chi_{(-\infty, 0)}(x) + 0 \cdot \chi_{[0, 2)}(x) + 2 \cdot \chi_{[2, \infty)}(x) \quad \Rightarrow$$

$$\int f d\lambda = 1 \cdot \lambda_{[0, 1]}(-\infty, 0) + 0 \cdot \lambda_{[0, 1]}([0, 2)) + 2 \cdot \lambda_{[0, 1]}([2, \infty))$$

$$\int f d\lambda_A = 1 \cdot \lambda_A([0, 1] \cap (-\infty, 0)) + 0 \cdot \lambda_A([0, 1] \cap [0, 2)) + 2 \cdot \lambda_A([0, 1] \cap [2, \infty))$$

$$= 1 \cdot \lambda_A(\emptyset) + 0 \cdot \lambda_A([0, 1]) + 2 \cdot \lambda_A(\emptyset)$$

$$= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0 \quad \text{bulunur.}$$

$$\int f d\lambda_A = 0.$$

c) $E = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}$ olur. $E = [2, \infty)$ olur.

$$\lambda_A([2, \infty)) = \lambda([0, 1] \cap [2, \infty)) = \lambda(\emptyset) = 0$$

olduğundan λ_A - A.h.h $f=g$ dir.

2) $\mathbb{R}^3$ de $\mathcal{M} = \{E \subset \mathbb{R}^3 \mid (x, y, x) \in E \text{ ise } (y, x, y) \in E\}$ olarak tanımlanıyor.

(10) a) $\mathcal{M}$ nin $\mathbb{R}^3$ de bir σ -cesiri olduğunu gösteriniz.

(10) b) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x+y$ olarak tanımlanan f nin ölçülebilir bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

(10) c) $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu(E) = \begin{cases} 1 & ; (0, 0, 0) \in E \text{ ise} \\ 0 & ; (0, 0, 0) \notin E \text{ ise} \end{cases}$

olarak tanımlanan μ nun $\mathcal{M}$ üzerinde bir ölçü ölçüm olduğunu gösteriniz.

Çözüm: a) $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3$, $\forall (x, y, x) \in \mathbb{R}^3$ için $(y, x, y) \in \mathbb{R}^3$ olduğundan $\mathbb{R}^3 \in \mathcal{M}$ dir.

• $E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}$ dir:

$E \in \mathcal{M} \Rightarrow \forall (x, y, x) \in E$ için $(y, x, y) \in E$ dir.

$\forall (x, y, x) \in E^c \Rightarrow (y, x, y) \in E^c$ olduğunu göstermeliyiz.

Aksi olsa; yani $(y, x, y) \notin E^c$ olsaydı $(y, x, y) \in E$ olurdu.

$E \in \mathcal{M}$ olduğundan $(x, y, x) \in E$ olurdu. Bu $E \cap E^c = \emptyset$

ile çelişir. Kabul yalan, yani $(y, x, y) \in E^c$ dir.

• ~~Herhangi~~ Herhangi $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathcal{M}$ ailesi gözönüne alınsın. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}$ dir, gösterelim:

$(x, y, x) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ olsun. $\exists k \in \mathbb{N}$ i $(x, y, x) \in E_k$ dir. $E_k \in \mathcal{M}$ oldu

$(y, x, y) \in E_k$ dir. $\Rightarrow (y, x, y) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ olur.

$\Rightarrow \mathcal{M}, \mathbb{R}^3$ de σ -cesiridir.

b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}(\alpha, \infty) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = x + y > \alpha\}$ kümesinin $\mathcal{M}$ ye ait olduğunu göstermeliyiz.

$(x, y, x) \in f^{-1}(\alpha, \infty) \Rightarrow f(x, y, x) > \alpha$ dir.

$\alpha < f(x, y, x) = x + y = y + x = f(y, x, y)$ olduğundan

$(x, y, x) \in f^{-1}(\alpha, \infty)$ için $(y, x, y) \in f^{-1}(\alpha, \infty)$ olur.

$\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = x + y > \alpha\} \in \mathcal{M}$ olur. $\Rightarrow f$ ölçülebilir.

c). $(0, 0, 0) \notin \phi$ olduğundan $\mu(\phi) = 0$ dir.

$\mu, 0, 1$ degerlerini aldıgından $\forall E \in \mathcal{M}$ için $\mu(E) \geq 0$ dir.

$k \neq n, E_k \cap E_n = \phi$ olan $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\subset \mathcal{M}$ olur.

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}$ dir.

$(0, 0, 0) \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \Rightarrow \forall n = 1, 2, \dots$ için $(0, 0, 0) \notin E_n$ dir.

O halde $\forall n = 1, 2, \dots$ için $\mu(E_n) = 0$ olur.

$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = 0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$ dir.

$(0, 0, 0) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : (0, 0, 0) \in E_k$ dir.

$\Rightarrow \mu(E_k) = 1$ dir.

$\forall k \neq n$ için $E_k \cap E_n = \phi$ olduğundan $k \neq n$ olan her $n \in \mathbb{N}$ için $(0, 0, 0) \notin E_n$ ve $\mu(E_n) = 0$ dir.

$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = 1$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \underbrace{\mu(E_1)}_0 + \underbrace{\mu(E_2) + \mu(E_3) + \dots}_{=1} = 1$

$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = 1 = \sum_n \mu(E_n)$

③ a) Monoton yakınsalık teoremini ifade edin.

$$\mathbb{R} \text{ üzerinde } f_n(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 0, x \geq \frac{1}{n} \text{ i.e.} \\ n^2; & 0 < x < \frac{1}{n} \text{ i.e.} \end{cases} \quad (10 \text{ puan})$$

olarak veriliyor. $f_n \rightarrow f=0$ m.h.h.h yakınsadığını gösterin.

b) (f_n) dizisinin monoton yakınsalık teoremini sağladığını gösterin. Neden teoremle gelişmez, açıklayınız. (10 puan)

Görüm: a) $x \leq 0$ ve $x \geq \frac{1}{n}$ iken $f_n(x) = 0$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \text{ olur.}$$

$$0 < x < \frac{1}{n} \Rightarrow f_n(x) = n^2 \text{ olup } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \infty \text{ olur.}$$

$$\mu\left(\left(0, \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\left(0, \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow f_n \rightarrow f=0 \text{ m.h.h.h yakınsar.}$$

$$b) \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\right) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0 \text{ dir.} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} n^2 \cdot \chi_{\left(0, \frac{1}{n}\right)}(x) dx$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\left(0, \frac{1}{n}\right)} n^2 dx$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 \cdot \frac{1}{n}\right) = \infty \quad (2)$$

(1) ve (2) den m.y.t. sağlamadı.

(Teoremle gelişmez çünkü (f_n) artan değil)

④ $\mathbb{R}$ deki λ Lebesgue ölçümünü kullanarak $\int_{[0,5]} \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor d\lambda$ integralini hesaplayınız. (10 puan)

Cevap: $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq x < 2 \\ 1 & ; 2 \leq x < 4 \\ 2 & ; 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$ dir.

Dolayısıyla $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ fonksiyonu 0, 1, 2 sonlu değerleri aldığından basit fonksiyondur.

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 0 \cdot \chi_{[0,2)}(x) + 1 \cdot \chi_{[2,4)}(x) + 2 \cdot \chi_{[4,5]}(x)$$

$$\begin{aligned} \int_{[0,5]} \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor d\lambda &= 0 \cdot \lambda([0,2)) + 1 \cdot \lambda([2,4)) + 2 \cdot \lambda([4,5]) \\ &= 0 + (4-2) + 2 \cdot (5-4) = 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

⑤ $f = 0$ μ -h.h.h reel değerli f ölçülebilir fonksiyonu verilsin. 0 zaman $f \in L(X, \mathcal{M}, \mu)$ ~~fonksiyonuna~~ olduğunu ve $\int f d\mu = 0$ olduğunu gösteriniz. (10 puan)

Cevap: $N = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$

$f = 0$ μ -h.h.h olduğundan $\mu(N) = 0$ ve $\forall x \in X - N$ için $f(x) = 0$ dr.

$$X = (X - N) \cup N \Rightarrow$$

$$\int_X f d\mu = \int_{(X-N) \cup N} f d\mu = \int_{X-N} f d\mu + \int_N f d\mu$$

$$\int_{X-N} f d\mu = \int_{X-N} 0 d\mu = 0 \text{ dir.}$$

$$\int_N f d\mu = \int_N f^+ d\mu - \int_N f^- d\mu = 0 - 0 = 0 \text{ dir.}$$

Çünkü $f \in L(X, \mathcal{M}, \mu) \Rightarrow f^+, f^- \in \mathcal{M}^+$ olup, $\mathcal{M}^+$ deki fonksiyonlar için integral sıfır idi. (4.10. Sorusu)

$$\Rightarrow \int_X f d\mu = 0 \text{ dir.}$$