

MAT469 ÖLÇÜM TEORİSİ BÜTÜNLEME SINAV SORULARI

① a) (A_n) azalan bir küme dizisi olsun. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

b) $A_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ olmak üzere (A_n) küme dizisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

② $(X_1, S_1), (X_2, S_2)$ iki ölçülebilir uzay, $X = X_1 \cup X_2$ olsun. $\mathcal{M} = \{A \subset X \mid A \cap X_1 \in S_1, A \cap X_2 \in S_2\}$ olmak üzere $(X, \mathcal{M})$ nin ölçülebilir uzay olduğunu gösteriniz.

③ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x & ; x < 0 \text{ i\se} \\ 1 & ; x = 0 \text{ i\se} \\ x^2 + 3 & , x > 0 \text{ i\se} \end{cases}$ olarak tanımlanan

f fonksiyonu Borel ölçülebilirdir, gösteriniz.

④ $M^+(X, \mathcal{M})$ deki fonksiyonlardan oluşan monoton artan (f_n) dizisi bir $f \in M^+$ fonksiyonuna μ -h.h.h yakınsıyor i\se $\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$ dir, ispatlayınız.

⑤ $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ölçü uzayı, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x) = \frac{1}{n} \chi_{[n, \infty)}(x)$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\lambda \neq \int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda$$

olduğunu gösteriniz. Bu soru, Monoton yakınsaklık teoremi ile çelişir mi? Açıklayınız. $(f, (f_n))$ dizisinin yakınsadığı fonksiyon

Not: Her soru eşit puanlıdır.

Süre 100 dakikadır.

Başarılar.

Prof. Dr.

Birsen SAĞIR DUYAR

1. Soru	2. Soru	3. Soru	4. Soru	5. Soru	Toplam

Görüm 1. a) $\limsup A_n = \liminf A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ olduğunu

göstermeliyiz. (A_n) aralar olduğunda

$$\limsup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n \right) = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$$

$$\liminf A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n \right) = \bigcup_{m=1}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1} \cap \dots)$$

$$= \bigcup_{m=1}^{\infty} (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots)$$

$$= \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

olur.

b) $A_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$

$\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ olduğundan

(A_n) küme dizisi aralar bir dizi. o halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \dots$$

$$= [-1, 1] \cap [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cap \dots \cap [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \cap \dots$$

$$= \{0\}$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \{0\}$ bulun.

(2). $X \subset X$ olup, $X \cap X_1 = X_1 \in S_1$, $X \cap X_2 = X_2 \in S_2$ olduğundan $X \in \mathcal{M}$ olur.

• $A \in \mathcal{M} \Rightarrow X - A \in \mathcal{M}$ dir:

$$A \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cap X_1 \in S_1, A \cap X_2 \in S_2 \Rightarrow$$

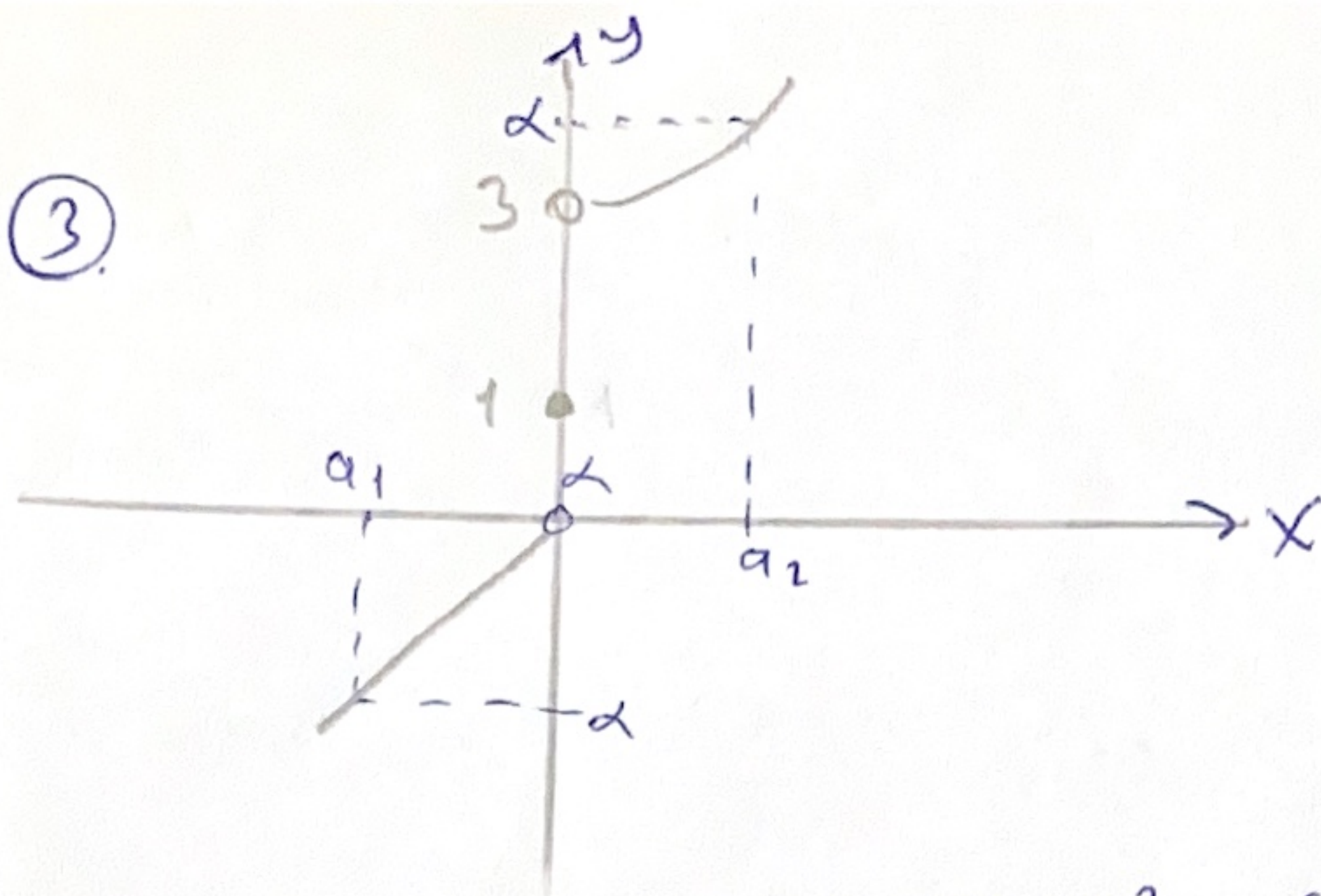
$$(X - A) \cap X_1 = (X \cap X_1) - (A \cap X_1) = \underbrace{X_1}_{\in S_1} - \underbrace{(A \cap X_1)}_{\in S_1} \in S_1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow X - A \in \mathcal{M}.$$

$$(X - A) \cap X_2 = (X \cap X_2) - (A \cap X_2) = \underbrace{X_2}_{\in S_2} - \underbrace{(A \cap X_2)}_{\in S_2} \in S_2$$

• $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in \mathcal{M} \Rightarrow A_n \cap X_1 \in S_1, A_n \cap X_2 \in S_2$ dir.

$$\left. \begin{array}{l} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap X_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap X_1) \in S_1 \\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap X_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap X_2) \in S_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}.$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap X_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap X_2) \in S_2$$



$$\alpha < 0 \text{ ise } \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} = (a_1, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$0 \leq \alpha < 1 \text{ ise } \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} = [0, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$1 \leq \alpha \leq 3 \text{ ise } \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} = (0, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$\alpha > 3 \text{ ise } \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} = (a_2, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

olup, f Borel σ -alebi'lidir.

④. Ders notlarında var

⑤. $\forall n \in \mathbb{N}$ isin $f_n \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in [n, \infty) \\ 0, & x \notin [n, \infty) \end{cases} = 0 = f(x),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n} \chi_{[n, \infty)} d\lambda$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lambda([n, \infty)) = +\infty$$

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} 0 d\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\lambda = +\infty \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda \text{ olur.}$$

$\forall x \in [n, n+1) \Rightarrow f_n(x) = \frac{1}{n}, f_{n+1}(x) = 0$ olduğundan

$\{f_n\}$ dizisi monoton artan olmaz. Bylece elde edilen sonuç ilgili teorem ile çelişmez.