

# Cevap Anahtarı

## Sayılar Teorisi Dersi Final Soruları

1- a)  $13x - 5y + 4z = 11$  Diophant denkleminin genel çözümünü bulunuz.

b)  $\left(\frac{1965}{2311}\right) = ?$  (2311 asal sayı)

2-  $f(x) = x^3 + 4x^2 - x + 3 \equiv 0 \pmod{125}$  polinom kongrüansının çözümünü bulunuz.

3- a)  $\{2, \overline{1,1,1,4}\}$  olan irrasyonel sayıyı bulunuz.

b)  $\sqrt{7}$  irrasyonel sayısını sürekli kesre dönüştürünüz.

4- a)  $511 \equiv (x) \pmod{53}$  kongrüansının çözümünü bulunuz.

b) Bir  $n$  pozitif tam sayısının pozitif bölgenleri sayısı toplamı  $\sigma(n)$  ile gösterilsin. ( $p \neq q$  asalları için)  $\sigma(p^2 q^2) = 1767$  ise  $p = ? q = ?$

5-  $5 \cdot x^9 \equiv 7 \pmod{11}$  kongrüansını mod 11 primitif kök bulup, bu kök yardımıyla çözümünü bulunuz.

Not: Sorular eşit puanlıdır.

1- a)  $(13, -5, 4) = d = 1$   $(-5, 4) = d_1 = 1$   $\beta = -4$   $\delta = -5$   
 $-5\alpha + 4\delta = 1$   $\alpha = -1$   $\gamma = -1$ ,  $13x + t = 11$   $x_0 = 1$ ,  $t_0 = -2$   
 $x = 1 + t$   $t = -2 - 13u$ ,  $y = -1(-2 + 3u) - 4u = 2 + 3u - 4u$   
 $z = -1(-2 - 3u) - 5u = 2 + 3u - 5u$

b)  $\left(\frac{1965}{2311}\right) = \left(\frac{3}{2311}\right) \left(\frac{5}{2311}\right) \left(\frac{131}{2311}\right) = 1$

2-  $f(2) = 8 + 16 - 2 + 3 \equiv 0 \pmod{5}$   $b = 2$   $f'(b) = 27$   $f(b) = 25$

$27k \equiv \frac{-25}{5} \pmod{5}$   $k = 0$   $x = 2 + 0 \cdot p \equiv 2 \pmod{25}$

$b' = 2$   $f(2) = 75$   $f'(2) = 27$

$27k \equiv \frac{-75}{25} \pmod{5}$   $2k \equiv -1 \pmod{5}$   $k \equiv 2 \pmod{5}$

$x = 2 + 2 \cdot 25 = 52 \pmod{125}$

$$3- a) \{2, \overline{1,1,1,4}\} = \sqrt{7}$$

$$b) \sqrt{17} = \{4, \overline{8}\}$$

4- a) Wilson teo. den

$$52! \equiv -1 \pmod{53}$$

$$52 \cdot 51! \equiv -1 \pmod{53}$$

$$(-1) 51! \equiv -1 \pmod{53} \Rightarrow 51! \equiv 1 \pmod{53} \text{ bulunur.}$$

$$b) \sigma(p^2 q^2) = \frac{p^3-1}{p-1} \cdot \frac{q^3-1}{q-1} = (p^2+p+1)(q^2+q+1) = 1767$$

$$(p^2+p+1)(q^2+q+1) = 31 \cdot 57 \quad p=5, q=7 \vee p=7, q=5$$

$$5- \Rightarrow 2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

$$2^4 = 5$$

$$2^5 = 10$$

$$2^6 = 9$$

$$2^7 = 7$$

$$2^8 = 3$$

$$2^9 = 6$$

$$2^{10} = 1$$

$g=2$  primitif  $\mathbb{Z}_{11}^*$

$$5^9 x \equiv 7 \pmod{11}$$

$$9 \operatorname{ind} x = \operatorname{ind} 7 - \operatorname{ind} 5 \pmod{10}$$

$$\operatorname{ind} x = 7$$

$$x \equiv 7 \pmod{11}$$